Matematica e Statistica
Soluzioni 01.02.2013

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Si consideri un mazzo di 40 carte. Vengono estratte 4 carte dal mazzo.

1. Calcolare la probabilità che tra le carte estratte vi siano esattamente due re.
2. Dati gli eventi R "è estratto il re di cuori" e l'evento C "'si estraggono esattamente 3 carte di cuori"', calcolare
$$P(R \cup C)$$

Soluzioni

1. Chiamando con $R2$ l'evento "esattamente due re" si ha che
$$P(R2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{2}}{\binom{40}{4}} = \frac{378}{9139}$$
2. $P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C)$, dove
$$P(R) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{40}{4}} = \frac{1}{10}$$
$$P(C) = \frac{\binom{10}{3} \cdot 30}{\binom{40}{4}} = \frac{360}{9139}$$
$$P(R \cap C) = \frac{\binom{9}{2} \cdot 30}{\binom{40}{4}} = \frac{108}{9139}$$
$$P(R \cap C) = \frac{1}{10} + \frac{360}{9139} - \frac{108}{9139} = \frac{11659}{91390}$$

Domanda N°2 Calcolare
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{3 + \tan^2 x}{2 + \tan^2 x}\right)$$

Soluzioni Operando la sostituzione $t = \tan^2 x$, si ha che
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{3 + \tan^2 x}{2 + \tan^2 x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{3 + t}{2 + t}\right) = \ln 1 = 0$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale definito:
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx$$

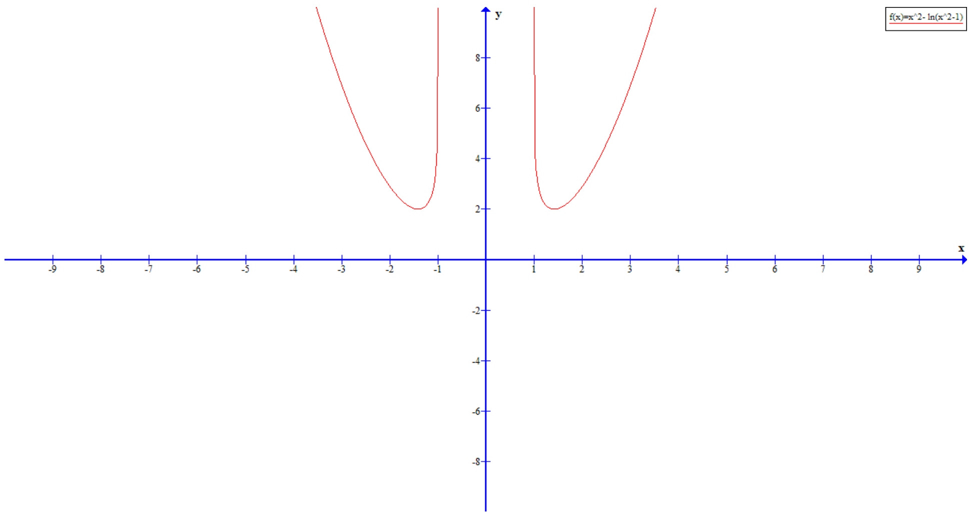
Soluzioni Compiendo la sostituzione $t = \tan x$, cioè $x = \arctan t$ e $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, e ricordando che $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ e $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, si ha che:
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{\frac{3t^2+1}{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}t)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t)|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Domanda N°4 Data la funzione:
$$f(x) = x^2 - \ln(x^2 - 1)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. utilizzando il punto precedente, determina la positività e l'intersezione con gli assi.
8. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
9. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
2. Si osserva che $f(x) = \ln\left(\frac{e^{x2}}{x^2-1}\right)$: usando il teorema de l'hopital
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x2}}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2xe^{x2}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x2} = +\infty$$
e così
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$
Inoltre
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
3. I punti $x = \pm1$ sono punti di discontinuità di seconda specie.
4. La funzione è pari.
5. Chiaramente la funzione non presenta asintoti orizzontali, mentre le rette $x = \pm1$ sono asintoti verticali. Verifichiamo la presenza di asintoti obliqui:
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - \ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-4x}{x^2-1} = \mp\infty,$$
dunque non vi sono altri asintoti.
6. $f'(x) = \frac{2x(x^2-2)}{x^2-1}$: dato che il denominatore è sempre maggiore di zero per ogni $x \in Dom_f$, si ha che $f'(x) = 0$, quando $x = 0 \notin Dom_f$ e $x = \pm\sqrt{2} \in_f$, f(x) è strettamente crescente se $-\sqrt{2} < x < -1$ e $x\sqrt{2}$ ed è strettamente decrescente se $1 < x < \sqrt{2}$ e $x < -1$. Pertanto $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo assoluto, dove $min = 2 - \ln 3 > 0$
7. Poiché $f(x) \geq 2 - \ln 3 > 0$, la funzione non ha intersezione con l'asse x; poiché $0 \notin Dom_f$, non ha neppure intersezione con l'asse y.
8. $f''(x) = \frac{2(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$, che è sempre positiva per ogni $x \in Dom_f$. Dunque la funzione è strettamente convessa.
9. Ecco un grafico della funzione:


y
x
f(x)=x^2- ln(x^2-1)
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8