Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2013 - 2014$ - 01.09.2014

Nome ....Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Si estraggono consecutivamente tre carte da un mazzo da 40 con reinserimento. Calcolare la probabilità che le tre carte siano:

1. due carte di cuori e una figura di un altro seme.
2. tre figure o tre carte di cuori
3. tre figure, sapendo di essere estratto tre carte di colore rosso.

Soluzioni Si stanno considerando disposizioni con ripetizione.

1. $P(2C \cap FNC) = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 9}{40^3} = \frac{27}{640}$
2. $P(3F) = \frac{12^3}{40^3} = \frac{27}{1000}$, $P(3C) = \frac{1}{64}$. $P(3F \cap 3C) = \frac{3^3}{40^3} = \frac{27}{64000}$, da cui
$$P(3F \cup 3C) = \frac{27}{1000} + \frac{1}{64} - \frac{27}{64000} = \frac{2701}{64000}$$
3. $P(3F|3R) = \frac{P(3F \cap 3R)}{P(3R)}$, $P(3F \cap 3R) = \left(\frac{6}{40}\right)^3 = \frac{27}{8000}$, $P(3R) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, da cui
$$P(3F|3R) = \frac{27}{1000}$$

Domanda N°2 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1+x)-\sin(1-x)}{\tan(1+x)-\tan(1-x)}$

Soluzioni

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1+x)-\sin(1-x)}{\tan(1+x)-\tan(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(1+x)+\cos(1-x)}{1+\tan^2(1+x)+1+\tan^2(1-x)} = \frac{2\cos(1)}{2+2\tan^2 1} = \frac{\cos(1)}{1+\tan^2(1)} =$$
$$= \cos^3(1)$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \arctan\sqrt{x} \quad dx$$

Soluzioni In primo luogo, applichiamo la sostituzione $t = \sqrt{x}$, in modo da ottenere $dx = 2tdt$ e così l'integrale diventa:

$$\int_0^1 \arctan\sqrt{x} \quad dx = \int_0^1 2t \arctan t \quad dt.$$

Applichiamo poi l'integrazione per parti, in modo da ottenere:

$$\int_0^1 2t \arctan t \quad dt = \left[t^2 \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \quad dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2} \quad dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - [t - \arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

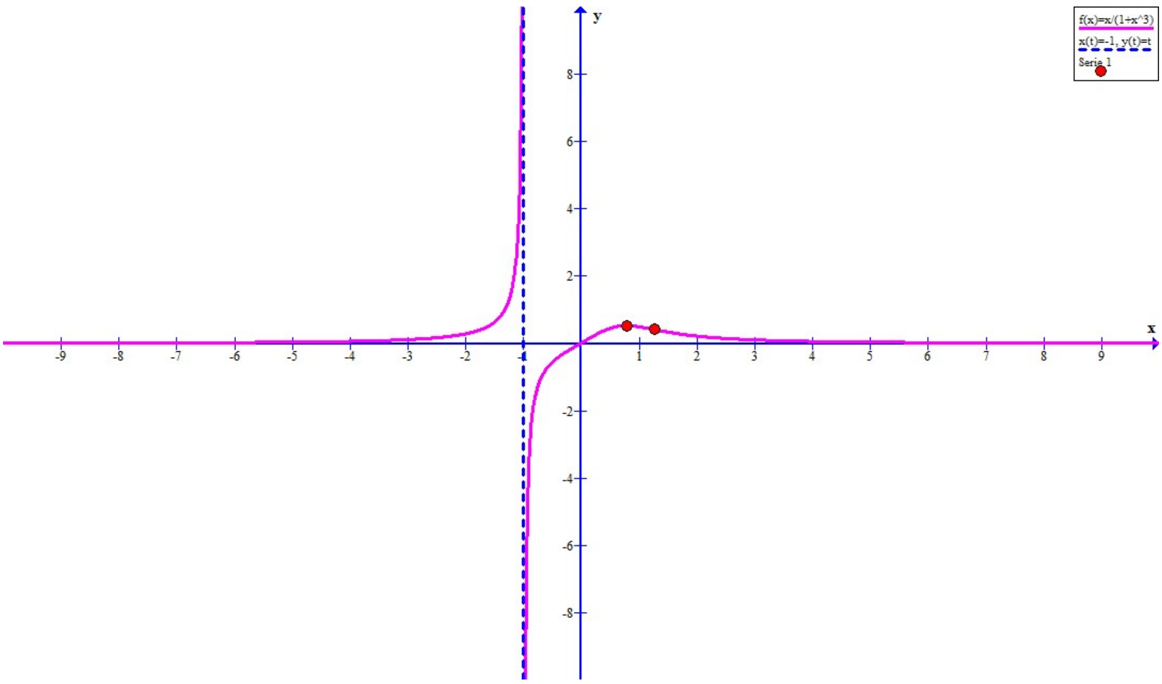
Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie e se la funzione è periodica;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
2. $f(0) = 0$ e questo è l'unico zero della funzione.
3. $f(x) > 0$ se $x < -1 \cup x > 0$, $f(x) < 0$ se $-1 < x < 0$
4. La funzione non presenta simmetrie ed è periodica
5. $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \mp\infty$, pertanto la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale. Inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pertanto l'asse x è un asintoto orizzontale per la funzione. Chiaramente non vi sono asintoti obliqui.
6. $f'(x) = \frac{1+x^3-x\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$: la derivata prima si annulla in $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. La funzione è crescente per $x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, decrescrente altrimenti. Il punto considerato è pertanto è un punto di massimo relativo.
7. $f''(x) = \frac{-6x^2(1+x^3)^2-2(1-2x^3)(1+x^3)3x^2}{(1+x^3)^4} = \frac{-6x^2(1+x^3+1-2x^3)}{(1+x^3)^3} = \frac{-6x^2(2-x^3)}{(1+x^3)^3}$. La derivata seconda si annulla in $x_0 = 0$ e in $x_1 = \sqrt[3]{2}$. La funzione è concava per $-1 < x < \sqrt[3]{2}$, mentre è convessa altrove. x_1 è pertanto un punto di flesso.
8. Ecco il grafico della funzione:


y
x
f(x)=x/(1+x^3)
x(t)=-1, y(t)=t
Serie 1
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8