Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. 2013 – 2014 - 14/07/2014

Nome ..... Cognome .....

Matricola n° .....

Domanda N°1 Hai a disposizione 8 gettoni rossi e 2 gialli. Trova il numero totale di modi possibili con cui possono:

1. essere allineati
2. essere allineati, con il primo e l'ultimo gettone rossi
3. essere allineati, con i primi due bottoni gialli.
4. essere allineati, con i due bottoni gialli sempre vicini.

Soluzioni

1. $\frac{10!}{8!2!} = 45$
2. $\binom{8}{2} = 28$
3. 1
4. 9

Domanda N°2 Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$

Soluzioni Utilizzando il fatto che $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{-\frac{1-\cos x}{x^2}} = -2$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad dx$$

Soluzioni Utilizzando l'integrazione per parti, otteniamo:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} \quad dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2}{\sqrt{x}} \quad dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = |x^3 - x^2| + x - |x|$$

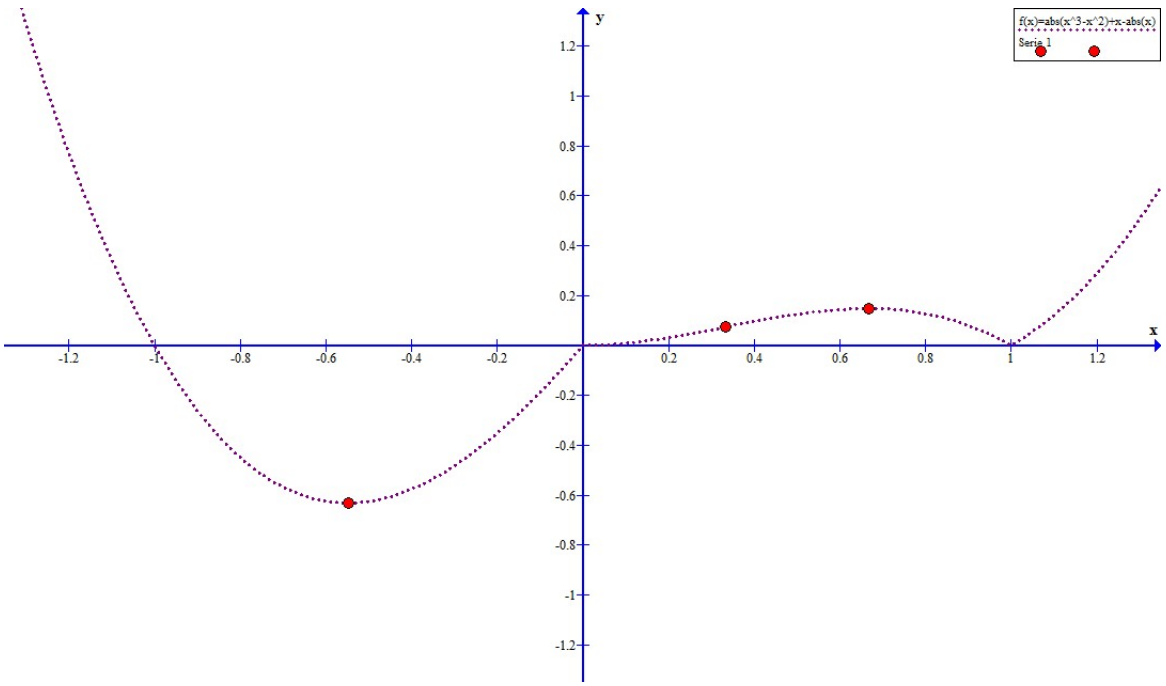
1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;

4. studiarne le eventuali simmetrie e se la funzione è periodica;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni In prima analisi, osserviamo che $f(x) = \begin{cases} x^2(x-1) & \text{se } x \geq 1 \\ -x^2(x-1) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x(x^2-x-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$

1. $Dom_f = \mathbb{R}$.
2. $f(0) = 0$; gli altri zeri di f sono $x = \pm 1$
3. Se $x > 1$, la funzione è positiva, se $0 < x < 1$ la funzione è negativa, mentre per $x < 0$ la funzione è positiva per $x < -1$, negativa altrimenti. Ricapitolando, la funzione è positiva per $x > 1 \cup x < -1$, negativa per $-1 < x < 0 \cup 0 < x < 1$.
4. La funzione non è periodica e non presenta simmetrie.
5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. La funzione non ha quindi asintoti orizzontali e, poiché ogni ramo della funzione è rappresentato da un polinomio di terzo grado, non ha nemmeno asintoti obliqui. Inoltre, essendo la funzione continua su tutta la retta reale, non ha asintoti verticali.
6. $f'(x) = \begin{cases} x(3x-2) & \text{se } x > 1 \\ -x(3x-2) & \text{se } 0 < x < 1 \\ -3x^2+2x+2 & \text{altrimenti} \end{cases}$
   Osserviamo che $f'_-(1) = -1 \neq 1 = f'_+(1)$ e $f'_-(0) = 2 \neq 0 = f'_+(0)$ e quindi i due punti sono punti angolosi.
   - se $x > 1$, $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è strettamente crescente;
   - se $0 < x < 1$, la funzione è strettamente crescente per $\frac{2}{3} < x < 1$ e strettamente decrescente per $0 < x < \frac{2}{3}$;
   - se $x < 0$, la funzione è strettamente crescente per $\frac{1-\sqrt{7}}{3} < x < 0$, strettamente decrescente altrove.

   Ricapitolando, $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ è un punto di minimo relativo stazionario (in realtà minimo assoluto), $x = \frac{2}{3} +$ un punto di massimo relativo stazionario, mentre $x = 1$ è un punto di minimo relativo non stazionario.
7. $f''(x) = \begin{cases} 6x-2 & \text{se } x > 1 \\ -6x+2 & \text{se } x < 1 \cap x \neq 0 \end{cases}$
   Pertanto per $x < \frac{1}{3} \cup x > 1$, la funzione è convessa; per $\frac{1}{3} < x < 1$ la funzione è concava. In particolare $x = \frac{1}{3}$ è un punto di flesso.
8. Ecco il grafico della funzione:


f(x)=abs(x^3-x^2)+x-abs(x)
Serie_1
y
x
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2