

Matematica e Statistica

Scienze Farmaceutiche Applicate

a.a. 2013 – 2014 - 16.01.2014

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1 Un'urna contiene due palline bianche e otto rosse. Tutte le estrazioni sono equiprobabili.

1. Si estraggono simultaneamente 3 palline dall'urna. Calcolare la probabilità che vengano estratte una pallina bianca e due rosse.
2. Si procede 5 volte di seguito all'estrazione di una pallina con reinserimento. Determinare la probabilità di estrarre 3 palline bianche.

Soluzioni

1. Se chiamo con A l'evento "vengono estratte una pallina bianca e due rosse in tre estrazioni senza reinserimento", allora

$$p(A) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{2 \cdot 28}{120} = \frac{7}{15}$$

2. Se X è la variabile aleatorie che calcola il numero di palline bianche uscite nelle 5 estrazioni con reinserimento, X ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 5$ e $p = \frac{1}{5}$. L'esercizio chiede di calcolare

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \cdot \frac{16}{5^5} = \frac{32}{625}$$

Domanda N°2 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1 - \cos x) - \ln x]$$

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1 - \cos x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right)$$

Dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$, otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1 - \cos x) - \ln x] = -\infty$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$$

Soluzione Pongo $t = \sqrt{x-1}$, così da ottenere $x = t^2 + 1$ e $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{(t^2+1)^3}{t} 2tdt = \int 2(t^2+1)^3 dt = 2 \int (t^6+3t^4+3t^2+1) dt = 2 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{3}{5}t^5 + t^3 + t \right) + c =$$

$$= 2 \left(\frac{(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} \right) + c$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = e^x \sqrt{1-x}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = (\infty, 1]$
2. La funzione passa per $A = (0, 1)$, mentre l'unico zero della funzione è $x_0 = 1$.
3. La funzione è sempre positiva nel suo dominio.
4. La funzione non presenta simmetrie e non è periodica.
5. Chiaramente la funzione non presenta asintoti verticali. Calcoliamo, ricorrendo al teorema de l'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2\sqrt{1-x}} = 0,$$

ossia l'asse x è un asintoto orizzontale. Chiaramente non vi sono asintoti obliqui.

6.

$$f'(x) = e^x \left(\sqrt{1-x} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = e^x \frac{1-2x}{2\sqrt{1-x}}$$

Osserviamo che $f'(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ per $x < \frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$ per $\frac{1}{2} < x < 1$. Quindi $x_M = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo e $M = \sqrt{\frac{e}{2}}$. Osservare che $x = 1$ è un punto di non derivabilità: infatti $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$.

7.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(-2+1-2x)\sqrt{1-x} + e^x(1-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \\ &= \frac{e^x[-2(1+2x)(1-x) + 1-2x]}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x(4x^2-4x-1)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ per $x_1 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \in Dom_f$, mentre $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \notin Dom_f$. La funzione è convessa per $x < x_1$, mentre è concava per $x_1 < x < 1$. Dunque $x = x_1$ è un punto di flesso.

8. Ecco il grafico della funzione:

