

Soluzioni compito 16.07.2012

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(2 + \sin x)$$

Risposta N°1 Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che $e^x(2 + \sin x) \leq e^x(2 + 1) = 3e^x$. Poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} 3e^x = +\infty$, usando il teorema del confronto segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(2 + \sin x) = +\infty$$

Domanda N°2 Determinare m e n in modo che la funzione

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$$

ammetta un massimo e un minimo, rispettivamente, nei punti di ascissa 3 e $-\frac{1}{3}$.

Calcoliamo la derivata prima di f :

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$$

Il testo del problema impone che

$$\begin{cases} f'(3) &= 0 \\ f'(-\frac{1}{3}) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27 + 6m + n &= 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}m + n &= 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 6m + n &= -27 \\ -2m + 3n &= -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6m + n &= -27 \\ 10n &= -30 \end{cases}$$

da cui otteniamo $m = -4$ e $n = -3$.

Domanda N°3 Calcolare il valore dell'area della parte di piano delimitata dalla curva di equazione

$$y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}},$$

l'asse x e le rette di equazione $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Risposta N°3

L'area richiesta è uguale all'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-2\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Risposta N° 4

• **Dominio:** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• **Intersezioni con gli assi**

Intersezione con l'asse x : $x = 0$

Intersezione con l'asse y : $f(0) = 0$

• **Segno**

Essendo $e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, usando la regola dei segni ricaviamo che $f(x) > 0$ quando $x < 0 \cup x > 1$; $f(x) < 0$ quando $0 < x < 1$.

• **Simmetria** La funzione non è né pari né dispari.

• **Comportamento agli estremi**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie e ivi si trova un asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Non vi sono asintoti obliqui per $x \rightarrow -\infty$: infatti

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-x}}{x-1} = +\infty$$

- **Studio della derivata prima** Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = -e^{-x} \frac{x}{x-1} + e^{-x} \cdot \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = -e^{-x} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = -e^{-x} \cdot \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right)$$

- $-e^{-x} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché il termine di grado massimo ha coefficiente positivo e $\Delta = -3 < 0$
- $(x-1)^2 > 0, \forall x \neq 1$

per cui $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D$ e pertanto risulta decrescente.

- **Studio della derivata seconda** Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - e^{-x} \cdot \frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} = e^{-x} \left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} \right) = \\ &= e^{-x} \left(\frac{(x^2 - x + 1)(x-1) - 1 - x}{(x-1)^3} \right) = e^{-x} \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x + x - 1 + 1 + x}{(x-1)^3} = \\ &= e^{-x} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{(x-1)^3} = e^{-x} \frac{x(x^2 - 2x + 3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

- *NUMERATORE* > 0 per $x > 0$, essendo $x^2 - 2x + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (il coefficiente del termine di grado massimo è positivo e $\Delta = -8 < 0$)
- *DENOMINATORE* > 0 per $x > 1$.

$f''(x) > 0$ per $x < 0 \cup x > 1$: in tale intervallo la funzione è convessa;

$f''(x) < 0$ per $0 < x < 1$: in tale intervallo la funzione è concava;

$f''(x) = 0$ per $x = 0$: questo è un punto di flesso.

Riassumendo, disegniamo il grafico della funzione:

