Soluzioni compito 25.01.2013

Nome ....Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Si consideri un insieme di 6 studenti composto da 2 ragazzi e 4 ragazze.

1. In quanti modi si possono sistemare gli studenti in una fila di 6 sedie ?
2. In quanti modi diversi si possono sedere i 6 studenti, con la condizione che le ragazze stiano tutti vicine tra loro così come anche le ragazzi e che la prima sedia sia occupata da un ragazzo?

Svolgimento

1. $6! = 720$
2. $2! \cdot 4! = 48$

Domanda N°2 Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2}$$

Svolgimento

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2}\frac{3+\sqrt{5x-1}}{3+\sqrt{5x-1}} = \lim_{x\to 2} \frac{10-5x}{4-x^2}\frac{1}{3+\sqrt{5x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{5(2-x)}{(2-x)(2+x)}\frac{1}{3+\sqrt{5x-1}} = \lim_{x\to 2} \frac{5}{2+x}\frac{1}{3+\sqrt{5x-1}} = \frac{5}{24}$$

Domanda N°3 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= -\frac{y}{x} + x^3 \\ y(1) &= -3 \end{cases}$$

Svolgimento L'equazione da risolvere è un'equazione lineare del primo ordine, dove $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $b(x) = x^3$ Utilizzando la formula risolutiva, otteniamo che

$$A(x) = \int_1^x -\frac{1}{t} \quad dt = -\ln|t||_1^x = -\ln|x|$$

Si ha che :

$$y(x) = e^{A(x)}\left[\int_1^x e^{-A(t)}b(t)dt - 3\right] = \frac{1}{|x|}\left[\int_1^x |t|t^3 dt - 3\right] = \frac{1}{x}\left[\int_1^x t^4 dt - 3\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\left[\frac{t^5}{5}\right]_1^x - 3\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} - 3\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{16}{5}\right]$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinarne la positività e le intersezioni con gli assi;

3. studiarne il comportamento agli estremi;
4. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
5. studiarne le eventuali simmetrie;
6. determinare gli eventuali asintoti;
7. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
8. darne un grafico approssimato, trascurando lo studio della derivata seconda.

Svolgimento

1. $D = Dom_f = x \in \mathbb{R} | \frac{x^3-1}{x} \geq 0 = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
2. $f(x) = 0$ per $x = 1$, mentre $f(x) > 0$ per ogni $x \in D \setminus \{1\}$. Chiaramente non vi sono intersezioni con l'asse y.
3. $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$
   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$
4. La funzione presenta due punti di discontinuità di specie ($x = 0$ e $x = 1$)
5. La funzione non è chiaramente né pari né dispari
6. La retta $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione, mentre non ha asintoti orizzontali. Vediamo se ammette asintoti obliqui. La funzione si può scrivere nella forma
   $$f(x) = |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}$$
   e pertanto
   $$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = 1$$
   $$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = -1$$
   $$q_1 = \lim_{x \to +\infty} |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} - x = \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} - 1\right) =$$
   $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} - 1\right)\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1\right)} = \lim x \to +\infty \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1\right)} = 0$$
   Analogamente $q_2 = \lim_{x - \infty} f(x) + x = 0$. Pertanto la curva ha due asintoti obliqui: le rette $y = \pm x$.
7. Per $x \neq 1$,
   $$f'(x) = \frac{2x^3 + 1}{2x\sqrt{x(x^3 - 1)}}$$
   Osserviamo che
   $$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty,$$
   ossia nel punto $(1, 0)$ la tangente è parallela all' asse y. La derivata si annulla soltanto per $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e questo è un punto di minimo relativo.

8. Ecco un grafico approssimato della funzione: