Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2013 - 2014$ - $05.02.2014$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 La trasmissione di un segnale può avvenire utilizzando due diversi canali A e B con la stessa probabilità, A trasmette sempre il segnale correttamente, mentre B trasmette il segnale correttamente con probabilità $\frac{3}{4}$.

1. Qual è la probabilità di ricevere un segnale corretto?
2. Avendo ricevuto un segnale corretto, qual è la probabilità che esso sia stato trasmesso da B ?

Soluzioni

1. Se S rappresenta l'evento "'ricevere un segnale corretto"',

$$p(S) = p(S|A)p(A) + p(S|B)p(B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

2.

$$p(B|S) = \frac{p(S|B)p(B)}{p(S)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$$

Domanda N°2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$$

Soluzioni

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} -\frac{e^{-x} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-x}-1}{-x}}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 + x} \quad dx$$

Soluzione Per prima cosa, cerchiamo due costanti A e B tali che:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

. Adesso $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$, per cui deve valere che $A + B = 0$ e $A = 1$, per cui $B = -1$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 + x} \quad dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= [\ln|x| - \ln|x+1|]_1^2 = \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \ln\cos x$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie e se la funzione è periodica;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} | \cos x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$
2. $f(x) = 0$ quando $\cos x = 1$, ossia quando $x_k = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. In particolare la funzione passa per l'origine.
3. $f(x) > 0$ quando $\cos x > 1$, che rappresenta una disequazione impossibile. Pertanto la funzione è sempre negativa.
4. La funzione è pari e ha periodo $T = 2\pi$.
5. Essendo una funzione periodica, $f(x)$ non ammette limite a più o meno infinito. Inoltre $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(x) = -\infty$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$: pertanto i punti considerati sono di discontinuità di seconda specie e le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono asintoti verticali.
6. $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Ristringiamo il nostro interesse all'intervallo $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e poi estendiamo con periodicità. La funzione derivata si annulla quando $\sin x = 0$, ossia per $x = 0$, è negativa per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e positiva per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. In particolare il punto $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.
7. $f''(x) = -(1 + \tan^2 x)$, per cui la funzione è sempre concava.
8. Ecco un grafico approssimato della funzione: