Soluzioni compito $02-04-2012$

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$$

Risposta N°1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)\sin^2 x\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin^2 x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{3}{2}$$

Domanda N°2 Determinare il punto di Lagrange della funzione

$$f(x)=\frac{4+x^2}{2x-1}$$

nell'intervallo $I=[-1,0]$.

Risposta N°2

Il punto c di Lagrange soddisfa la seguente proprietà:

$$f'(c)=f(0)-f(-1),$$

ossia

$$\frac{2c(2c-1)-2(4+c^2)}{(2c-1)^2}=-4+\frac{5}{3}$$

. Ne deduco che

$$\frac{2c^2-2c-8}{(2c-1)^2}=-\frac{7}{3}.$$

c soddisfa l'equazione

$$6c^2-6c-24=-28c^2-7+28c,$$

per cui $2c^2-2c-1=0$. Dovendo essere c negativo,

$$c=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

.

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int e^x\cos x\sin x\,dx$$

Risposta N°3 Ricordando che $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, otteniamo che, integrando per parti due volte,

$$\int e^x \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \int e^x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - 2\int e^x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin x \cos x \, dx$$

Concludiamo che

$$\int e^x \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{10} e^x \sin 2x - \frac{1}{5} e^x \cos 2x + c.$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Risposta N°4 Il dominio di $f(x)$ è dato dall'insieme $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Il grafico di f non interseca l' asse y, mentre invece $f(x) = 0$ quando $\frac{2x}{x^2+1} = 1$. Questo implica che $(x-1)^2 = 0$, ossia $x = 1$.
$f(x) > 0$ quando $\frac{2x}{x^2+1} > 1$, cioè $\frac{-(x-1)^2}{x^2+1} > 0$, che è impossibile e dunque la funzione è sempre negativa. La funzione non è né pari né dispari. Il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. La funzione non ha asintoti obliqui: infatti

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(usando il teorema de l' Hospital), ma

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{2x} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$$

Ricordando che $x > 0$

$$f'(x) > 0 \quad per \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) < 0 \quad per \quad x > 1$$

In particolare $x_M = 1$ è un punto di massimo relativo (in realtà assoluto).

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x^2(1+x^2) - (1-x^2)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2}$$

Ricordando che $x > 0$:

$f''(x) > 0 \quad quando \quad x^4 - 4x^2 - 1 > 0 \quad ossia \quad quando \quad x^2 > 2+\sqrt{5} \quad da \quad cui \quad x > \sqrt{2+\sqrt{5}}$

$$f''(x) < 0 \quad per \quad 0 < x < \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

$x_f = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ è un punto di flesso. Riassumendo, disegniamo il grafico della funzione: