

Soluzioni compito 18.06.2012

Domanda N°1 Risolvere la seguente disequazione:

$$\log_6(3x - 4) < \log_6(2x + 1)$$

Risposta N°1

Dobbiamo risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ 3x - 4 < 2x + 1 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione sono $\{x \in \mathbb{R} | \frac{4}{3} < x < 5\}$

Domanda N°2 Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = 3x - 4 \arctan(x)$$

nell'intervallo $I = [0, 1]$

Risposta n° 2

In primo luogo, calcoliamo

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3 - \pi$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3 - \frac{4}{1+x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Osserviamo che $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin I$, mentre $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di minimo relativo per f . Inoltre $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$. Confrontando i quattro valori ottenuti, il punto di minimo assoluto è $x_m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre quello di massimo assoluto è $x_M = 0$.

Domanda N°3 Qual è il valore incognito della successione di dati:

$$3, 4, 4, 6, x, 8$$

se la loro media aritmetica è 5? Dopo aver determinato x , calcolare moda e mediana dell'insieme di valori ottenuto

Risposta n°3 Utilizzando la definizione di media aritmetica abbiamo che:

$$5 = \frac{3 + 4 + 4 + 6 + x + 8}{6},$$

ossia

$$30 = 25 + x,$$

da cui $x = 5$. Dato che la moda è il valore con la frequenza assoluta maggiore, $MODA = 4$. Per calcolare la mediana, ordiniamo i valori in ordine crescente.

$$3, 4, 4, 5, 6, 8.$$

Dato che il numero dei valori è $n = 6$, ossia un numero pari, la mediana sarà la media aritmetica tra il valore di posto $\frac{n}{2} = 3$ e il valore successivo, ossia

$$MEDIANA = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = x + 1 - \sqrt[3]{x + 1}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Risposta n° 4

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Intersezioni con gli assi**

Intersezione con l'asse x : $x + 1 = \sqrt[3]{x + 1}$, ossia $(x + 1)^3 = x + 1$, da cui

$$(x + 1)(x^2 + 2x) = 0.$$

Da cui ricaviamo che i punti di intersezione con l'asse x sono 0, -1 e -2 . Intersezione con l'asse y : $f(0) = 0$

• **Segno**

$f(x) > 0$ quando $x(x + 1)(x + 2) > 0$. Utilizzando la regola dei segni ricaviamo che $f(x) > 0$ quando $-2 < x < -1 \cup x > 0$ $f(x) < 0$ quando $x < -2 \cup -1 < x < 0$.

• **Simmetria** La funzione non è né pari né dispari.

- **Comportamento agli estremi** Nel dominio la funzione è continua: dunque f non ha asintoti verticali. Osserviamo che x è un infinito di ordine 1 per $x \rightarrow \pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali.

La funzione non ha asintoti obliqui: infatti

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} = 1,$$

ma

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \infty$$

- **Studio della derivata prima** Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = -\infty$$

e dunque $x = -1$ è un punto di flesso a tangente verticale.

$f'(x) > 0$ per $x < -1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cup x > -1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$: in tale intervallo la funzione è crescente in senso stretto;

$f'(x) < 0$ per $-1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} < x < -1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$: in tale intervallo la funzione è decrescente in senso stretto;

$f'(x) = 0$ per $x = -1 \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$. In particolare $x_M = -1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x_m = -1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ è un punto di minimo relativo.

- **Studio della derivata seconda** Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$$

$f''(x) > 0$ per $x > -1$: in tale intervallo la funzione è convessa;

$f''(x) < 0$ per $x < -1$: in tale intervallo la funzione è concava;

Riassumendo, disegniamo il grafico della funzione:

