Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2012 - 2013$ - .06.2013

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(6^x+1)^{\frac{1}{x}})$$

Soluzioni

$$\lim_{x\to+\infty}(6^x+1)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(6^x+1)}{x}}$$

Utilizzando il teorema de l'Hopital si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(6^x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6^x\ln 6}{6^x+1} = \ln 6$$

Pertanto il limite cercato vale $e^{\ln 6} = 6$.

Domanda N°2 Determinare il valore dell'integrale:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

Soluzioni Poniamo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, da cui $dx = 2tdt$. L'integrale diventa:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt = 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2(t-\ln|1+t|)|_0^2 = 4-2\ln 3$$

Domanda N°3 Siano dati due eventi A e B tali che $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ e $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$ Calcolare:

1. $P(A\cup B)$
2. $P(A|B)$
3. $P(A^C)$
4. $P(A\setminus B)$
5. $P(A^C\cup B^C)$

Soluzioni

1. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{5}{8}$
2. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

3. $P(A^C) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$
4. $P(A) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8}$
5. Per le leggi di De Morgan, $P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B) = \frac{7}{8}$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = x + 2\sin x$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare l'intersezione con l'asse y;
4. determinare l'eventuale periodo;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. dallo studio della derivata prima, determinare la positività della funzione e le eventuali intersezioni con gli assi.
10. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
11. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \mathbb{R}$
2. Utilizzando il fatto che $\sin x$ è una funzione limitata tra -1 e 1, abbiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$x - 2 \leq x + 2\sin x \leq x + 2$$
Usando il teorema del confronto, deduciamo che
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$
3. Se $x = 0$, $f(x) = 0$
4. La funzione non è periodica.
5. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$.
6. La funzione è dispari.
7. La funzione non presenta asintoti orizzontali o verticali. Valutiamo la presenza di asintoti obliqui.
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{2\sin x}{x} = 1,$$
sempre ricorrendo al teorema del confronto, ma
$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} 2\sin x,$$
ma tale limite non esiste.
8. $f'(x) = 1 + 2\cos x$
    - $f'(x) = 0$ se $\cos x = -\frac{1}{2}$, ossia per $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
    - $f'(x) > 0$ se $-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$
    - $f'(x) < 0$ altrimenti.

Pertanto i punti della forma $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ sono punti di minimo relativo, mentre i punti della forma $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ sono di massimo relativo.

9. Osservando che $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$, gli zeri della funzione (oltre a $x_0 = 0$) sono da ricercare nell'intervallo $[-2, 2]$. Osservando che $-\frac{2}{3}\pi < -2 < 2 < \frac{2}{3}\pi$, nell'intervallo $[-2, 2]$ la funzione è strettamente crescente. Pertanto si annulla soltanto in $x_0 = 0$. Inoltre il segno di f è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$.

10. $f''(x) = -2\sin x$
    - $f''(x) = 0$ per $x = k\pi$, con k numero intero.
    - La funzione risulta convessa quando $\sin x < 0$, ossia quando $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$;
    - La funzione risulta concava altrimenti.

11. Ecco il grafico della funzione.