Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2012 - 2013$ - 28.06.2013

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x (5 + \cos x)$$

Soluzioni Tenendo conto che $-1 \leq \cos x \leq 1$, si ha che:

$$4e^x \leq (5 + \cos x) \leq 6e^x,$$

Sruttando il fatto che $\lim_{x\to+\infty} 4e^x = \lim_{x\to\infty} 6e^x = +\infty$, per il teorema dei carabinieri si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} e^x (5 + \cos x) = +\infty$$

Domanda N°2 Determinare il valore dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x^2} dx$$

Soluzioni

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c xe^{-3x^2} dx = -\frac{1}{6} e^{-3x^2}|_0^c = \lim_{c\to+\infty} -\frac{1}{6}(e^{-3c^2} - 1) = \frac{1}{6}$$

Domanda N°3 Consideriamo quattro numeri distinti.

1. Quante coppie si possono formare con i quattro numeri dati in modo tale che due coppie differiscano tra loro per almeno un numero oppure per l'ordine dei numeri?

2. Quante coppie si possono formare con i quattro numeri dati in modo tale che due coppie differiscano tra loro per almeno un numero ?

3. Quante coppie si possono formare con i quattro numeri dati in modo tale che due coppie differiscano tra loro per almeno un numero oppure per il numero di ripetizioni di uno stesso numero ?

4. Quante coppie si possono formare con i quattro numeri dati in modo tale che due coppie differiscano tra loro per almeno un numero oppure per il numero di ripetizioni di uno stesso numero oppure per l'ordine dei numeri?

Soluzioni

1. $D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$
2. $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$
3. $C'_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$
4. $D'_{4,2} = 4^2 = 16$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
3. La funzione non ha chiaramente intersezione con l'asse y, mentre passa per $(1, 0)$.
4. $f(x) > 0$, per $x < 1$, con $x \neq 0$; $f(x) < 0$ per $x > 1$.
5. Poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.
6. La funzione non presenta simmetrie.
7. Chiaramente la funzione ha come asintoto orizzontale la retta $y = 0$ e come asintoto verticale la retta $x = 0$.
8. $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} = \frac{x-2}{x^3}$. Pertanto $f'(x) = 0$ se $x = 2$, $f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0 \cup$x ≥ 2. Il punto $x = 2$ è pertanto di minimo relativo (assoluto).
9. $f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(3-x)}{x^4}$. Il punto di flesso è $x = 3$, la funzione è convessa per $x < 3$, con $x \neq 0$ e concava per $x > 3$.
10. Ecco il grafico della funzione: