

Matematica e Statistica

Scienze Farmaceutiche Applicate

a.a. 2012 – 2013 - 02.09.2013

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$$

Soluzioni Utilizziamo due volte il teorema de l'Hopital, ottenendo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Domanda N°2 Determinare il valore dell'integrale:

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln|x-1|}{x-1} dx$$

Soluzioni Poiché stiamo integrando rispetto a valori di x più piccoli di 1, si ha che $\ln|x-1| = \ln(1-x)$.

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln|x-1|}{x-1} dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(-x+1)}{x-1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2(1-x) \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln^2(2) \right] = 0$$

Domanda N°3 Le stature (in cm) di un campione di nove persone sono:

173 182 177 182 173 179 162 182 174

Calcolare la moda, la mediana, la media e la deviazione standard dell'insieme di dati.

Soluzioni Ordiniamo i dati in ordine crescente:

162 173 173 174 177 179 182 182 182

La moda è il valore con la frequenza assoluta maggiore, ossia $MODA = 182$. Dato che il numero di dati è 9, ossia un numero dispari, la mediana è il dato che occupa la posizione centrale, ossia la quinta: $MEDIANA = 177$. La media aritmetica è data da:

$$\mu = \frac{162 + 173 \cdot 2 + 174 + 177 + 179 + 182 \cdot 3}{9} = 176$$

Infine, la deviazione standard è data da:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(162-176)^2 + 2(173-176)^2 + (174-176)^2 + (177-176)^2 + (179-176)^2 + 3(182-176)^2}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{196 + 18 + 4 + 1 + 9 + 108}{9}} = \sqrt{\frac{318}{9}} = 5,944. \end{aligned}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 \ln(2x)}{1}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = (0, +\infty)$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\ln(2x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

3. Chiaramente la funzione non ha intersezioni con l'asse y , mentre passa per $(\frac{1}{2}, 0)$.
4. $f(x) > 0$ per $x > \frac{1}{2}$, $f(x) < 0$ per $0 < x < \frac{1}{2}$.
5. La funzione presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di specie, in quanto il $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ non esiste.
6. La funzione non presenta asintoti verticali o orizzontali. Vediamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(2x) = +\infty$$

7. $f'(x) = 2x \ln(2x) + x = x(2 \ln(2x) + 1)$.

(a) $f'(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

(b) $f'(x) > 0$ quando $x > \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

(c) $f'(x) < 0$ quando $x < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

Il punto $x = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ è perciò di minimo relativo.

8. $f''(x) = 2 \ln(2x) + 1 + 2 = 2 \ln(2x) + 3$.

(a) $f''(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$.

(b) $f''(x) > 0$ quando $x > \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$.

(c) $f''(x) < 0$ quando $x < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$.

9.

