Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2015 - 2016$ -Febbraio 2016

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1

Si lanciano due dadi equi. Si calcoli la probabilità che

1. il minimo tra i due numeri ottenuti sia 1;
2. il massimo tra i due numeri sia minore o uguale a 5;
3. la somma tra i due numeri sia 8 sapendo che il massimo tra i due numeri è minore o uguale a 5

Soluzioni

1. $P(min = 1) = 1 - P(min \neq 1) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$
2. $P(Max \leq 5) = \frac{25}{36}$
3. $P(S = 8|Max \leq 5) = \frac{P(S=8 \cap Max \leq 5)}{P(Max \leq 5)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{25}{36}} = \frac{3}{25}$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^2 + x - 6},$$

Soluzioni

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+1}{x+3} = \frac{15}{5} = 3$$

Domanda N°3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

Soluzioni

. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1 - \cos x$, otteniamo che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \left[-\cot x + \frac{1}{\sin x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

:

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0\right\} = (0, +\infty)$

2. La funzione non ha intersezioni con l'asse y. Inoltre $f(x) = 0$ se $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 1$, ossia se $\sqrt{x^2+1} = x+1$. L'equazione ha soluzione soltanto per $x = 0$ che è escluso dal dominio.

3. $f(x) > 0$ se $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 1$, da cui $\frac{\sqrt{x^2+1}-1-x}{x} > 0$. Osserviamo che il numeratore è sempre negativo se $x > 0$ poiché $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{x^2+1+2x} = \sqrt{(x+1)^2} = x+1$, mentre il denominatore è positivo. Pertanto $f(x) < 0$ se $x \in Dom_f$.

4. La funzione non presenta simmetrie.

5. $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0_+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \infty$$

   Pertanto l'asse y è un asintoto verticale per la funzione.

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\right) = 0$$

   Pretanto l'asse x è un asintoto orizzontale per la funzione.

6. $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x - \sqrt{x^2+1}+1}{x^2} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} > 0,$$

   per ogni $x \in Dom_f$. La funzione è, pertanto, strettamente crescente.

7. $$f''(x) = -\frac{\sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2 \cdot (x^2+1)} = -\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 0,$$

   per ogni $x \in Dom_f$. Pertanto la funzione è concava.

8. Ecco riportato un grafico approssimato della funzione.