

Matematica e Statistica

Scienze Farmaceutiche Applicate

a.a. 2014 – 2015 - Gennaio 2015

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1 Abbiamo a disposizione due urne: l'urna A contiene 30 palline numerate da 1 a 30, l'urna B contiene 60 palline numerate da 1 a 60. Scegliamo a caso un'urna e estraiamo una pallina, il cui numero indicheremo con X . Calcolare la probabilità che:

1. $X = 30$, sapendo che è stato estratto dalla prima urna.
2. $X = 30$.
3. la pallina sia estratta dalla prima urna, sapendo che $X = 30$.

Soluzioni Esercizio n°1

1. $P(X = 30|A) = \frac{1}{30}$
2. $P(X = 30|B) = \frac{1}{60}$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Per la legge delle probabilità totali:

$$P(X = 30) = P(X = 30|A)P(A) + P(X = 30|B)P(B) = \frac{1}{30} \frac{1}{2} + \frac{1}{60} \frac{1}{2} = \frac{1}{60} + \frac{1}{120} = \frac{1}{40}$$

3. $P(A|X = 30) = \frac{P(X=30|A)P(A)}{P(X=30)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{40}} = \frac{2}{3}$

Domanda N°2 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzioni Esercizio n°2 Utilizzando il teorema de l'Hopital, ricaviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} ae^{ax} - be^{bx} = a - b$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \ln x \, dx$$

Soluzioni esercizio n°3 Risolviamo l'integrale per parti. Pertanto:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = 9e^{\frac{x}{9}} \sqrt[9]{x}$$

1. determinare il campo di esistenza;

- determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
- determinarne la positività;
- studiarne le eventuali simmetrie;
- studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
- calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
- calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
- darne un grafico approssimato.

Soluzione Esercizio n°4

- $Dom_f = \mathbb{R}$;
- La funzione passa per l'origine e non ha altre intersezioni con l'asse x .
- La funzione è positiva per $x > 0$, negativa altrimenti;
- La funzione non presenta simmetrie né periodicità;
- La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$; pertanto non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^{\frac{1}{9}}}{e^{-\frac{x}{9}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-\frac{8}{9}}}{-\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{9}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9e^{\frac{x}{9}}}{x^{\frac{8}{9}}} = 0$$

Pertanto l'asse x è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$. Controlliamo l'esistenza di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 9 \frac{e^{\frac{x}{9}}}{x^{\frac{8}{9}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{9}}}{\frac{8}{9}x^{-\frac{1}{9}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{8} e^{\frac{x}{9}} x^{\frac{1}{9}} = +\infty \end{aligned}$$

Non vi sono asintoti obliqui.

- $f'(x) = e^{\frac{x}{9}} x^{-\frac{8}{9}} + e^{\frac{x}{9}} x^{\frac{1}{9}} = e^{\frac{x}{9}} x^{-\frac{8}{9}} (1+x)$. La derivata prima si annulla per $x = -1$, la funzione è positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$. Pertanto tale punto è di minimo relativo. Osserviamo inoltre che $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$, pertanto x è un punto di flesso a tangente verticale.

7.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{9} e^{\frac{x}{9}} \left(x^{-\frac{8}{9}} + x^{\frac{1}{9}} \right) + e^{\frac{x}{9}} \left(-\frac{8}{9} x^{-\frac{17}{9}} + \frac{1}{9} x^{-\frac{8}{9}} \right) = \\ &= \frac{1}{9} e^{\frac{x}{9}} \left(x^{\frac{1}{9}} + 2x^{-\frac{8}{9}} - 8x^{-\frac{17}{9}} \right) = \frac{1}{9} x^{-\frac{17}{9}} e^{\frac{x}{9}} [x^2 + 2x - 8] \end{aligned}$$

La derivata seconda si annulla in $x = -4$ e $x = 2$, che sono punti di flesso in aggiunta a $x = 0$ (a tangente orizzontale (in tale punto non è definita la derivata seconda)). La funzione è convessa per $-4 < x < 0 \cup x > 2$, concava altrove.

8. Ecco il grafico della funzione.

