Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2014-2015$ -Settembre 2015

Nome ....Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1

Risolvere i seguenti quesiti:

1. Quanti sono gli anagrammi della parola GIOGO?
2. Quanti sono i numeri a 3 cifre, con cifre tutte dispari?
3. Risolvi la seguente equazione:
$$\binom{x+2}{4} = 7\binom{x}{4}$$

Soluzione

1. $\frac{5!}{2!2!} = 30$
2. $5^3 = 125$
3. $$\frac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{4!} = 7\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$$
Poiché $x \geq 4$, $x \neq 0 \wedge x \neq 1$, si può semplificare i fattori $x(x-1)$, così da ottenere:
$$(x+2)(x+1) = 7(x-2)(x-3)$$
Svolgendo i calcoli, l'equazione risolvente diventa $3x^2 - 19x + 20 = 0$. Le soluzioni dell'equazione sono $x = 5$ (accettabile) e $x = \frac{4}{3}$ (non accettabile).

Domanda N°2

Calcolare
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1},$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-3x-1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})(x-1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})} = -\frac{1}{2}$$

Domanda N°3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln(\cos x)\sin x}{\cos^2 x} \quad dx$$

Soluzione

Pongo $t = \cos x$, $dt = -\sin x \quad dx$ L'integrale diventa

$$\int -\frac{\ln t}{t^2} \quad dt = \frac{\ln t}{t} - \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} + c = \frac{\ln \cos x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} + c$$

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{\sin x + 1}{2\sin x - 1}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzione

La funzione è periodica di periodo $T = [0, 2\pi]$. Quindi ristringo lo studio all'intervallo $I = [0, 2\pi]$.

1. $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. $f(0) = -1$, $f(x) = 0$ quando $\sin x = -1$, ossia per $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $f(x) > 0$ se $\sin x > \frac{1}{2}$, ossia se $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. La funzione non presenta simmetrie.
5. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ non esistono; $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)^+} f(x) =$ $\lim_{x\to\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)^-} f(x) = +\infty$. Pertanto tali punti presenta un asintoto verticale.
6. $f'(x) = \frac{-3\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$. La derivata si annulla per $\cos x = 0$, ossia per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. $f'(x) > 0$ per $\cos x < 0$, ossia per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $f'(x) < 0$ per $\cos x > 0$, ossia per i valori restanti. Ne deduciamo che $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono punti di minimo relativo $m = 2$, mentre $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ sono punti di massimo relativo.
7. $f''(x) = \frac{3(2-\sin x)}{2(1-\sin x)^3}$, dato che il numeratore è sempre positivo, non vi sono flessi. $f(x)$ è convessa se $\sin x > \frac{1}{2}$, ossia dove la funzione è positiva; è concava dove la funzione è negativa.

8. Ecco il grafico della funzione: