Soluzioni compito $04 - 06 - 2012$

Domanda N°1 Risolvere la seguente disequazione:

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 15\left(\frac{3}{2}\right)^{x} < 19$$

Risposta N°1

Ponendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, la disequazione diventa:

$$4t^2 + 15t - 19 < 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono: $t_1 = -\frac{19}{4}$ e $t_2 = 1$. Le soluzioni della disequazione sono:

$$-\frac{19}{4} < t < 1$$

Risostituendo, otteniamo

$$-\frac{19}{4} < \left(\frac{3}{2}\right)^{x} < 1$$

La prima disequazione è soddisfatta da ogni numero reale, mentre la seconda è valida per $x < 0$, essendo la base dell'esponeziale maggiore di 1. Intersecando le soluzioni, otteniamo che l'insieme delle soluzioni è dato da: $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.

Domanda N°2 Calcolare il punto di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

nell'intervallo $I = [-1, 4]$.

Risposta N°2

In primo luogo, calcoliamo

$$f(-1) = -1 - 2 = -3$$

$$f(4) = 64 - 2 \cdot 16 = 32$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

$$f'(x) > 0 \quad per \quad x < 0 \cup x > \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = 0 \quad per \quad 0 < x < \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = 0 \quad per \quad x = 0 \cup x = \frac{4}{3}$$

Osserviamo che $x = 0$ è un punto di massimo relativo per f, mentre $x = \frac{4}{3}$ è di minimo relativo per f. Inoltre $f(0) = 0$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{64}{27} - 2 \cdot \frac{16}{9} = -\frac{32}{27}$. Confrontando i quattro valori ottenuti, il punto di minimo assoluto è $x_m = -1$, mentre quello di massimo assoluto è $x_M = 4$.

Domanda N°3 Sopra un tavolo vi sono due urne: nella prima il 30% delle palline è blu, nella seconda solo il 10%. Presa a caso una pallina e trovatala blu, qual è la probabilità che essa provenga dalla seconda urna?

Risposta N°3 Definiamo alcuni eventi elementari e le loro rispettive probabilità (le due urne sono equiprobabili):

- $B|U_1$ è l'evento "estrazione di una pallina blu sapendo che proviene dalla prima urna": vale che $P(B|U_1) = 0.3$
- $B|U_2$ è l'evento "estrazione di una pallina blu sapendo che proviene dalla seconda urna": vale che $P(B|U_2) = 0.1$
- U_1 è l'evento "scelta della prima urna": vale che $P(U_1) = 0.5$
- U_2 è l'evento "scelta della seconda urna": vale che $P(U_2) = 0.5$

Il problema chiede di calcolare

$$P(U_2|B):$$

per il teorema di Bayes

$$P(U_2|B) = \frac{P(B|U_2)P(U_2)}{P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.3 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = (x+2)^2 \ln(x+2)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. determinarne la positività;
5. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
6. studiarne le eventuali simmetrie;
7. determinare gli eventuali asintoti;
8. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Risposta N°4

- **Dominio**:$\{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$.

  Usando il teorema de l'Hospital

  $$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\ln(x+2)}{\frac{1}{(x+2)^2}} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\frac{1}{x+2}}{-\frac{2}{(x+2)^3}} = \lim_{x \to -2^+} -\frac{(x+2)^2}{2} = 0$$

- **Intersezioni con gli assi**

  Intersezione con l'asse x: $x = -1$

  Intersezione con l'asse y: $f(0) = 4\ln(2)$

- **Segno**

  $f(x) > 0$ quando $\ln(x+2) > 0$, cioè $x > -1$

  $f(x) < 0$ quando $-2 < x < -1$.

- **Simmetria** La funzione non è né pari né dispari.

- **Comportamento agli estremi** Nel dominio la funzione è continua: dunque f non ha asintoti verticali. Inoltre

  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty :$$

  pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali.

  La funzione non ha asintoti obliqui: infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (usando il teorema de L' Hospital)

- **Studio della derivata prima** Calcoliamo la derivata prima

  $$f'(x) = 2(x+2)\ln(x+2) + (x+2) = (x+2)(2\ln(x+2)+1)$$

  Ricordando che $x > -2$

  $f'(x) > 0 \quad per \quad x > e^{-\frac{1}{2}} - 2$: in tale intervallo la funzione è crescente in senso stretto;

  $f'(x) < 0 \quad per \quad -2 < x < e^{-\frac{1}{2}} - 2$: in tale intervallo la funzione è decrescente in senso stretto;

  $f'(x) = 0 \quad per \quad x = e^{-\frac{1}{2}} - 2$. In particolare $x_m = e^{-\frac{1}{2}} - 2$ è un punto di minimo relativo (in realtà assoluto).

- **Studio della derivata seconda** Calcoliamo la derivata seconda:

  $$f''(x) = 2\ln(x+2) + 3$$

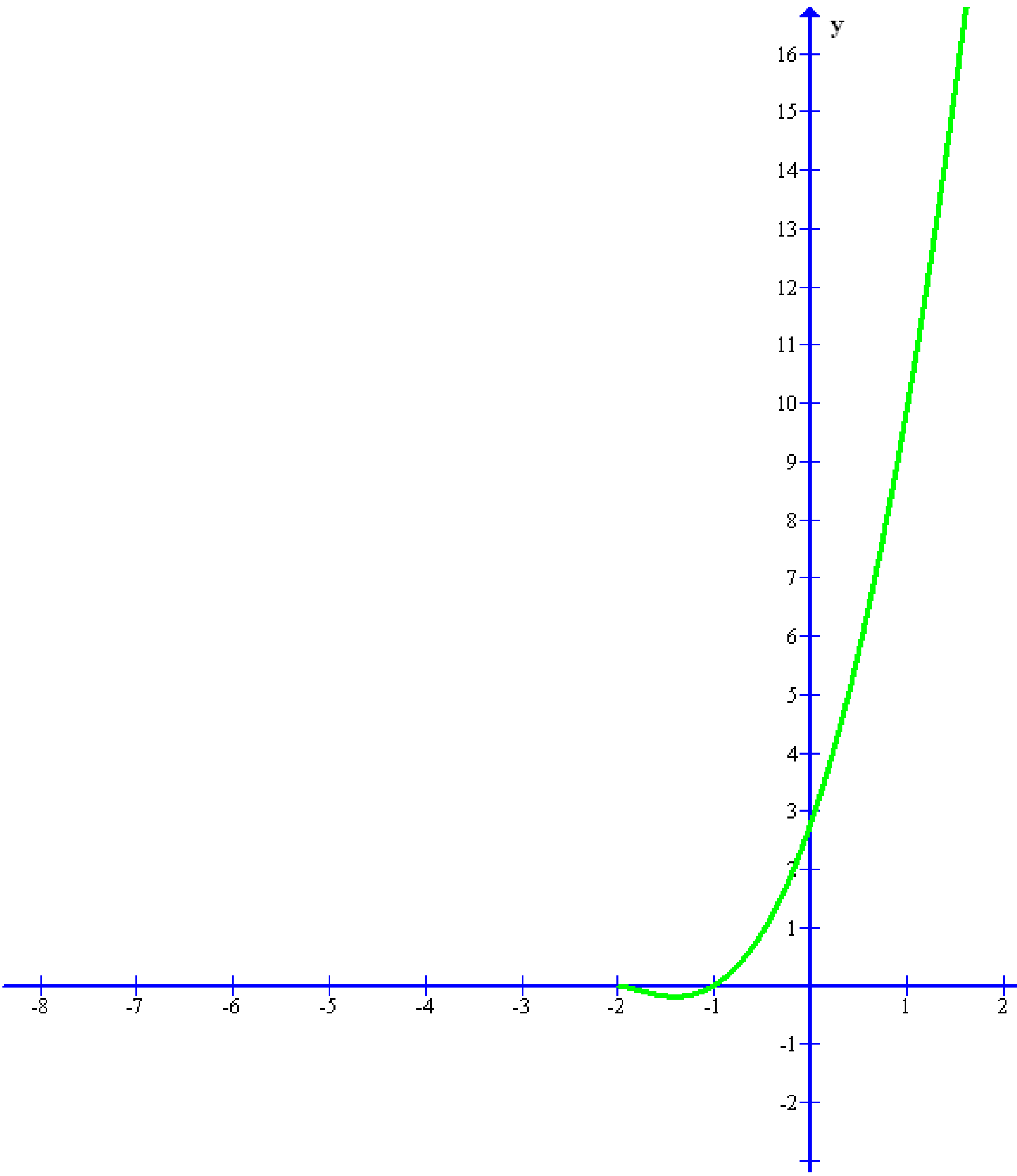
  Ricordando che $x > 0$:

  $f'(x) > 0 \quad per \quad x > e^{-\frac{3}{2}} - 2$: in tale intervallo la funzione è convessa;

  $f'(x) < 0 \quad per \quad -2 < x < e^{-\frac{3}{2}} - 2$: in tale intervallo la funzione è concava;

  $x = e^{-\frac{3}{2}} - 2$ è un punto di flesso.

Riassumendo, disegniamo il grafico della funzione:


y
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
1
-1
-2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2