Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2013 - 2014$ - $16/06/2014$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Una ditta farmaceutica produce un certo medicinale: questo medicinale presenta un eccesso di principio attivo con probabilità pari al 4%, mentre presenta un difetto di principio attivo con probabilità pari al 5%. In entrambi i casi il medicinale viene scartato.

1. Qual è la probabilità che un medicinale venga scartato?
2. Qual è la probabilità che il medicinale contenga troppo principio attivo, sapendo che è stato scartato?

Soluzioni

1. Indico con E l'evento "'il medicinale presenta un eccesso di principio attivo "'e con D l'evento "'il medicinale presenta un eccesso di principio attivo "' e osservo che i due eventi sono chiaramenti incompatibili. Pertanto la probabilità che un medicinale venga scartato è pari a
$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) = 9\%$$
2. $$P(E|D \cup E) = \frac{P(E)}{P(D \cup E)} = \frac{4}{9}$$

Domanda N°2 Calcolare
$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Soluzioni
$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(\cos x + \sin x)}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} = e$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^1 e^{x+e^x} \quad dx$$

Soluzioni
$$\int_0^1 e^{x+e^x} \quad dx = \int_0^1 e^x e^{e^x} \quad dx = \left[e^{e^x}\right]_0^1 = e^e - e$$

Domanda N°4 Data la funzione:
$$f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;

3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie e se la funzione è periodica;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$ Risolviamo la prima disequazione:
$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1$$
$$\frac{1-x^2+1+x^2}{1+x^2} \geq 0$$
$$\frac{2}{1+x^2} \geq 0$$
Questa disequazione è valida per ogni $x \in \mathbb{R}$. Risolviamo la seconda disequazione:
$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$
$$\frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0$$
$$\frac{-2x^2}{1+x^2} \leq 0$$
Questa disequazione è valida per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui $Dom_f = \mathbb{R}$.

2. $f(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, mentre $f(x) = 0$ se $\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0$, ossia per $x = \pm 1$.

3. $f(x) > 0$ se $\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$, ossia per $-1 < x < 1$.

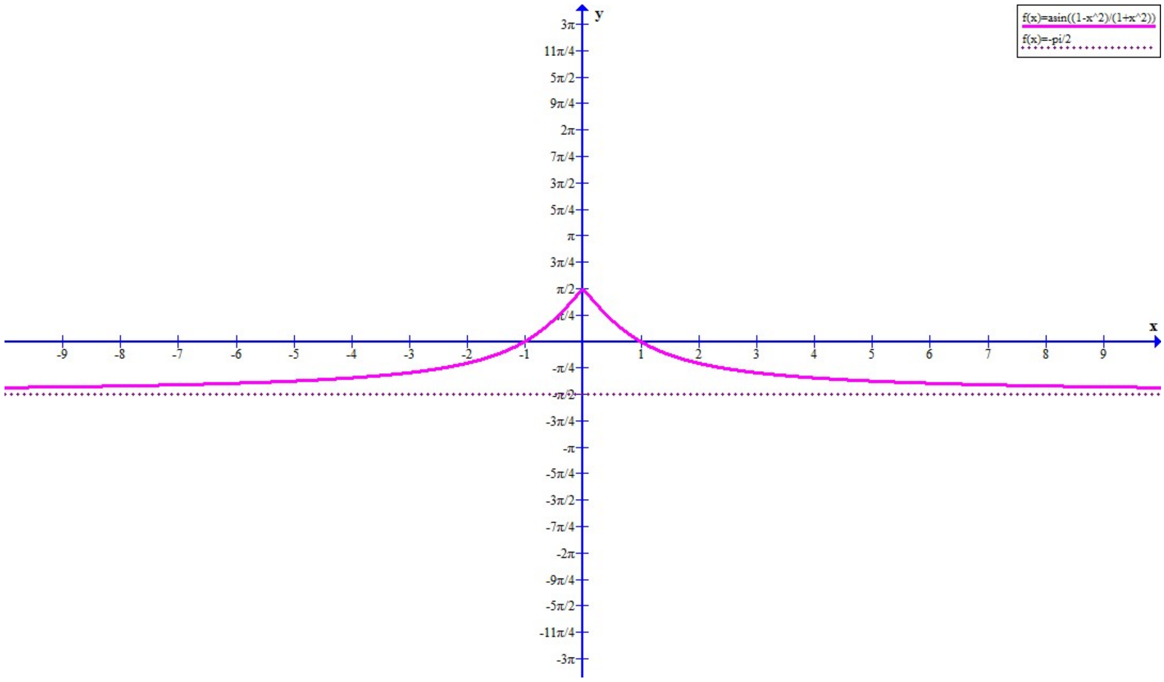
4. La funzione è pari e non è periodica.

5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, la funzione presenta quindi un asintoto verticale e nessun asintoto obliquo. Inoltre non ha punti di discontinuità e pertanto nemmeno asintoti verticali.

6. $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)}.$$
Se $x > 0$, $f'(x) = \frac{-2}{1+x^2} < 0$: quindi per x positivi la funzione è strettamente decrescente; se $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$ e quindi per x negativi la funzione è strettamente crescente. Inoltre $f'_-(0) = 2 \neq -2 = f'_+(0)$: pertanto $x = 0$ è un punto angoloso e un punto di massimo assoluto non stazionario.

7. $f''(x) = \frac{4|x|}{(1+x^2)^2}$, per ogni $x \neq 0$, pertanto la funzione è convessa.

8. Ecco il grafico della funzione.



f(x)=asin((1-x^2)/(1+x^2))
f(x)=-pi/2
y
x
3π
11π/4
5π/2
9π/4
2π
7π/4
3π/2
5π/4
π
3π/4
π/2
π/4
-π/4
-π/2
-3π/4
-π
-5π/4
-3π/2
-7π/4
-2π
-9π/4
-5π/2
-11π/4
-3π
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9