Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. 2014 – 2015 -Giugno 2015

Nome ..... Cognome .....

Matricola n° .....

Domanda N°1

Un' urna contiene 7 biglie bianche, 6 nere, 3 blu e 2 gialle.

1. Determina la probabilità che, estraendo successivamente due palline, rimettendo la prima estratta nell'urna, siano dello stesso colore.
2. Ripeti l'esercizio precedente, considerando l'estrazione senza reimmissione della prima biglia estratta nell'urna.

Soluzione

1. $P_1 = \frac{7^2+6^2+3^2+2^2}{18^2} = \frac{98}{324} = \frac{49}{162}$
2. $P_2 = \frac{7\cdot 6+6\cdot 5+3\cdot 2+2\cdot 1}{18\cdot 17} = \frac{42+30+6+2}{306} = \frac{80}{306} = \frac{40}{153}$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\sec x}$$

Soluzione

Effettuando la sostituzione $t = \frac{1}{\cos x}$ e ricordando che $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, otteniamo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\sec x} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Domanda N°3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3-22x+3}{x^2+4x-5} \quad dx$$

Soluzione

$$\int \frac{x^3-22x+3}{x^2+4x-5} \quad dx = \int x-4+\frac{-x-17}{(x+5)(x-1)} \quad dx.$$

Determiniamo A e B in modo tale che:

$$\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x-A+5B}{(x+5)(x-1)} = \frac{-x-17}{(x+5)(x-1)}$$

Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} A+B & = -1 \\ -A+5B & = -17 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $A=2$ e $B=-3$. Pertanto l'integrale diventa:

$$\int \frac{x^3-22x+3}{x^2+4x-5}\quad dx = \int x-4+\frac{2}{x+5}-\frac{3}{x-1}\quad dx = \frac{x^2}{2}-4x+2\ln|x-5|-3\ln|x-1|+c$$

Domanda N°4

Data la funzione:

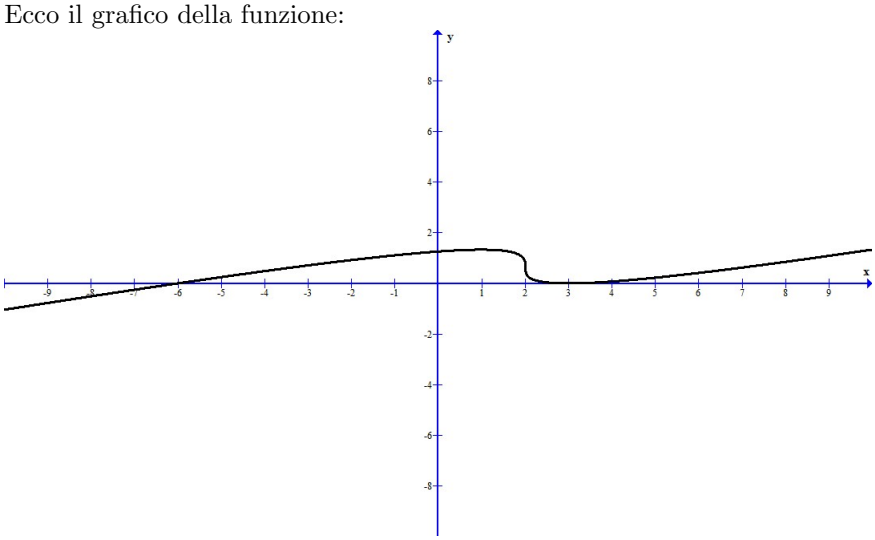
$$f(x)=\frac{x}{3}+\sqrt[3]{2-x}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzione

1. $Dom_f = \mathbb{R}$
2. $f(0)=\sqrt[3]{2}$. Per determinare gli zeri della funzione, si deve risolvere l'equazione $\frac{x}{3}+\sqrt[3]{2-x}=0$, ossia:
$$\frac{x}{3}=-\sqrt[3]{2-x}$$
. Elevando ambo i membri alla terza, otteniamo:
$$\frac{x^3}{27}=x-2$$
L'equazione finale da risolvere è:
$$x^3-27x+54=0$$
Utilizziamo il teorema di Ruffini per determinare gli zeri interi, che devono essere cercati tra i divisori di $54=3^3\cdot 2$. $f(1)=1-27+54\neq 0$, $f(-1)=-1+27+54\neq 0$, $f(2)=8-54+54\neq 0$, $f(-2)=-8-54-54\neq 0$, $f(3)=27-81+54=0$. Utilizzando il metodo di Ruffini, otteniamo $x^3-27x-54=(x-3)(x^2+3x-18)=(x-3)^2(x+6)$, pertando le radici del polinomio sono $x=3$ e $x=-6$.
3. Per la positività riutilizziamo l'equazione di prima: $f(x)\geq 0$ quando $x^3-27x+54<0$, ossia quando $(x-3)^2(x+6)\geq 0$, cioè $x\geq -6$.
4. La funzione non presenta simmetrie
5. La funzione non presenta discontinuità, $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Ricerchiamo la presenza di eventuali asintoti.
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt[3]{2-x}}{x}=\frac{1}{3}$$
$$q=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}+\sqrt[3]{2-x}-\frac{x}{3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{2-x}=\infty$$
Non vi sono pertanto asintoti obliqui.

6. $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right)$. $f'(x) = 0$ quando $\sqrt[3]{(x-2)^2} = 1$, ossia $(x-2)^2 = 1$. L'equazione da risolvere è $x^2 - 4x + 3 = 0$, che fornisce come soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. $f'(x) > 0$ quando $\sqrt[3]{(x-2)^2} > 1$, ossia per $x < 1 \cup x > 3$. Ne deduciamo che $x = 1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 3$ è un punto di massimo relativo. Osserviamo che $\lim_{x\to 2} f'(x) = -\infty$, ossia $x = 2$ è u punto di flesso a tangente verticale.

7. $f''(x) = \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}$, pertanto per $x > 2$ la funzione è convessa, concava per $x < 2$.

8. Ecco il grafico della funzione: