Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2015 - 2016$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1

Il dado A ha 4 facce rosse e 2 bianche, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 bianche. Si lancia una moneta non truccata: se esce testa, i gioco continua con il dado A, altrimenti con il dado B.

1. Mostrare che la probabilità che la faccia sia rossa a ogni lancio è $\frac{1}{2}$.
2. Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabiità che venga rosso al terzo lancio?
3. Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A?

Soluzioni

1. Chiamiamo con R_n l'evento "all' n-esimo lancio esce una faccia rossa", A l'evento "tiro il dado A" e con B "'tiro il dado B". Osserviamo che $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Utilizzando la legge delle alternative:
$$P(R_n) = P(R_n|A)P(A) + P(R_n|B)P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
2. Se si tira la moneta A, accade che:
$$P(R_1 \cap R_2|A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$
$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$
$$P(R_1 \cap R_2|B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$
$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$
Di conseguenza:
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1 \cap R_2|A)P(A) + P(R_1 \cap R_2|B)P(B) = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$
e
$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{9}{54} = \frac{1}{6}$$

Infine,

$$P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{5} = \frac{3}{5}$$

3. $P(A|R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2|A)P(A)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{5}$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x + 1)}.$$

Soluzioni

Utilizziamo il principio di sostituzione degli infinitesimi. $2 - \cos 2x = 1 + (1 - \cos 2x) \approx 1 + \frac{(2x)^2}{2} = 1 + 2x^2$, $\ln(2 - \cos 2x) \approx 2x^2$, $\ln^2(\sin 3x + 1) \approx \sin^2 3x \approx 9x^2$. Pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x + 1)} = \frac{2}{9}$$

Domanda N°3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 3x dx$$

Soluzioni

Calcoliamo prima l'integrale indefinito per parti:

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \cos 3x - \frac{3}{2} \int \cos 2x \sin 3x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \cos 3x - \frac{3}{4} \sin 2x \sin 3x +$$

$$+\frac{9}{4} \int \sin 2x \cos 3x dx.$$

Alla fine ricaviamo:

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{2}{5} \cos 2x \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 2x \sin 3x + c.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 3x dx = \left[\frac{2}{5} \cos 2x \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 2x \sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{10} - \frac{2}{5}$$

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{1-2x}\right)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo (trascurare lo studio della derivata seconda)
7. calcolare la derivata seconda e determina gli eventuali punt di flesso.
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \left\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq \frac{x-1}{1-2x} \leq 1\right\}$. Devo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \geq & 0 \\ & & \\ \frac{3x-2}{2x-1} & \geq & 0 \end{cases}$$

   Le soluzioni della prima disequazione sono $S_1 = (-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, mentre $S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. $Dom_f = S_1 \cap S_2 = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

2. $f(0) = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$ quando $x = 1$.

3. $f(x) > 0$ se $x \in Dom_f \cap \{x \in \mathbb{R} | \frac{x-1}{1-2x} > 0\} = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

4. f non presenta simmetrie

5. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ La funzione presenta soltanto un asintoto orizzontale, di equazione $y = -\frac{\pi}{6}$

6. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{1-2x+2(x-1)}{(1-2x)^2} = \frac{-|2x-1|}{\sqrt{3x^2-2x}(2x-1)^2}$ Se $x < \frac{2}{3}$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3x^2-2x}(2x-1)} < 0$; se $x \leq 0$, $f'(x) \frac{1}{\sqrt{3x^2-2x}(2x-1)} > 0$. Non vi sono punti di minimo o massimo. I punti $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ sono punti di non derivabilità.

7. Se $x \geq \frac{2}{3}$, $f''(x) = \frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^2(3x^2-2x)^3}$. $f''(x) = 0$ per $x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{24} \notin Dom_f$. In particolare se $x \geq \frac{2}{3}$, $f''(x) > 0$. Se $x < 0$, $f''(x) = -\frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^2(3x^2-2x)^3} < 0$ Non vi sono punti di flesso.

8. Ecco un grafico approssimato: