# Matematica e Statistica
# Scienze Farmaceutiche Applicate
# a.a. $2014 - 2015$ - Luglio $2015$

Nome ........................... Cognome ...........................

Matricola n° ...........................

**Domanda N°1**

Dati i seguenti dati:

$$582 \quad 599 \quad 578 \quad 582 \quad 588 \quad 588 \quad 599 \quad 578 \quad 582 \quad 588 \quad 582$$

Calcolare media, mediana, moda, varianza, deviazione standard e coefficiente di variazione.

**Soluzione**

Per prima cosa, ordiniamo i valori in senso crescente, indicati con le relative frequenze.

| Valore | Frequenza assoluta |
|---|---|
| 578 | 2 |
| 582 | 4 |
| 588 | 3 |
| 599 | 2 |

La moda vale 582, la mediana è l'elemento di posto $\frac{11+1}{2} = 6$, ossia vale 582, mentre la media vale $\mu = \frac{578 \cdot 2 + 582 \cdot 4 + 588 \cdot 3 + 599 \cdot 2}{11} = 586$ La varianza vale

$$\sigma^2 = \frac{578^2 \cdot 2 + 582^2 \cdot 4 + 588^2 \cdot 3 + 599^2 \cdot 2}{11} - 586^2 = 49,27.$$

La deviazione standard vale $\sigma = 7,02$. Il coefficiente di variazione vale $CV = \frac{7,02}{586} = 0,012$.

**Domanda N°2**

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{x^4},$$

**Soluzione**

Utilizzando il metodo di sostituzione degli infinitesimi:

$$\sin(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$$

Pertanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x - \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2x^2} = -\infty$$

**Domanda N°3**

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x + 2}{e^{2x} + 4} \quad dx$$

**Soluzione**

Con la sostituzione $t = e^x$, $dx = \frac{1}{t}dt$ e l'integrale diventa:

$$\int \frac{t+2}{t(t^2+4)}dt$$

Determiniamo tre coefficienti $a$, $b$ e $c$ tali che :

$$\frac{t+2}{t(t^2+4)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+4} = \frac{(a+b)t^2+ct+4a}{t(t^2+4)}$$

Otteniamo $a+b=0$, $c=1$, $4a=2$, ossia $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$, per cui

$$\int \frac{t+2}{t(t^2+4)}dt = \int \frac{1}{2t} - \frac{t}{2(t^2+4)} + \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|t^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\ln(e^{2x}+4)}{4} + \frac{\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)}{2} + c$$

**Domanda N°4**

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{4} + \arctan\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne le eventuali simmetrie;
3. studiarne il comportamento agli estremi, determinare gli eventuali asintoti e classificare i punti di discontinuità;
4. calcolare la derivata prima, classificare i punti di non derivabilità e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
5. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
6. determinarne la positività;
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

**Soluzione**

1. $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
2. La funzione non ha simmetrie.
3. $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
4. $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{2}$$
   $$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$$
   Il punto $x=3$ ha una discontinuità a salto.
5. $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} + \frac{\arctan\left(\frac{x+1}{x-3}\right)}{x} = \frac{1}{4}$$
   $$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{x}{4} = \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$
   La funzione ha pertanto un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}$.

6. $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2} \cdot \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = \frac{1}{4} + \frac{-3}{(x-3)^2+(x+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{-4}{2x^2-4x+10} = \frac{x^2-2x+5-8}{4(x^2-2x+5)} =$

$$= \frac{x^2-2x-3}{4(x^2-2x+5)}.$$

   $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 3$ (soluzione non accettabile), $f'(x) > 0$ per $x < -1 \cup x > 3$ e negativa altrove. Pertanto $x = -1$ ($f(-1) = -\frac{1}{4}$) è un punto di massimo relativo.

7. $f(0) = -\arctan 13$. Osserviamo che per $f(x) < 0$ per $x < -3$, mentre per $x > 3$ $f(x) > 0$, pertanto la funzione non si annulla mai.

8.
$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2}$$

   $f''(x) = 0$ per $x = 1$ (punto di flesso), la funzione è convessa per $x > 1$, concava pr $x < 1$.

9. Ecco un grafico approssimanto della funzione: