

Matematica e Statistica

Scienze Farmaceutiche Applicate

a.a. 2015 – 2016

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1

Un armadio contiene 10 paia di scarpe. Se scegliamo a caso 8 scarpe, qual è la probabilità che:

1. ci sia nessun paio completo;
2. ci sia esattamente un paio completo.

Soluzioni

1. Le scarpe totali sono 20: per sceglierne 8, considero un totale di $\binom{20}{8}$ combinazioni. Per far sì di scegliere 8 scarpe da paia diverse, scelgo 8 paia su 10 e per ogni paio ho 2 scelte per la scarpa da considerare

$$p = \frac{\binom{10}{8} \cdot 2^8}{\binom{20}{8}} = \frac{384}{4199} = 0,09145$$

2. Scelgo prima il paio di cui prenderò entrambe le scarpe (10 scelte), poi scelgo altri 6 paia su 9 e per ogni paio ho 2 scelte per la scarpa da considerare.

$$p = \frac{10 \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6}{\binom{10}{8}} = \frac{1792}{4199} = 0,4267$$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)}.$$

Soluzioni

Applichiamo il metodo di sostituzione degli infinitesimi per $x \rightarrow 0$: $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \approx \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \approx x$, $\ln(1-x) \approx -x$. Pertanto il limite considerato vale -1 .

Domanda N°3

Verificare la convergenza del seguente integrale e calcolarlo:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|(x-4)}} dx$$

Soluzioni

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx$$

. Entrambi gli integrali convergono poiché, per $x \rightarrow 0$ $\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} \approx -\frac{1}{4\sqrt{|x|}}$ che è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$.

Calcolo il primo integrale con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ e $dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{t(t^2-4)} 2t dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)(t-2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{|t-2|}{|t+2|} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

Calcolo il secondo integrale con la sostituzione $t = \sqrt{-x}$, da cui $x = -t^2$ e $dx = -2t dt$:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx = \int_1^0 \frac{-2t dt}{t(-t^2-4)} = 2 \int_1^0 \frac{dt}{t^2+4} = \left[\arctan \frac{t}{2} \right]_1^0 = -\arctan \frac{1}{2}.$$

L'integrale finale ha valore $-\frac{1}{2} \ln 3 - \arctan \frac{1}{2}$.

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{xe^x}{\sqrt{2x-1}}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo. (evitare lo studio della derivata seconda)
7. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = (\frac{1}{2}, +\infty)$
2. Non vi sono intersezioni con gli assi né simmetrie.
3. La funzione è sempre positiva nel dominio.
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, quindi la funzione ha soltanto un asintoto verticale.
5. $f'(x) = \frac{e^x(2x^2-2x-1)}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$ $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ (il valore con il segno meno non appartiene al dominio). $f'(x) > 0$ se $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e negativa altrimenti. $x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo assoluto.
6. Ecco il grafico approssimato:

 lu16.jpg