

Matematica e Statistica

Scienze Farmaceutiche Applicate

a.a. 2014 – 2015 - Marzo 2015

Nome Cognome

Matricola n°

Domanda N°1

I pazienti di un reparto vengono curati con due tipi di medicinali A e B ; al 60% dei degenti viene somministrato il medicinale A , ai rimanenti quello B . Su 100 pazienti curati con il medicinale A , 70 risultano guariti, mentre su 100 pazienti curati con il medicinale B , 65 risultano guariti. Scelto a caso un paziente guarito, qual è la probabilità che gli sia stato somministrato il medicinale B .

Soluzione

Indicando con G l'evento "paziente guarito", con A l'evento "somministrato il medicinale A " e con B l'evento "somministrato il medicinale B ", abbiamo per ipotesi che $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P(G|A) = 0,7$, $P(G|B) = 0,65$. Per il teorema di Bayes:

$$P(B|G) = \frac{P(G|B)P(B)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B)} = \frac{0,65 \cdot 0,4}{0,65 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,7} = \frac{0,26}{0,26 + 0,42} = 0,38$$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}},$$

Soluzione

Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$: il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\sqrt[3]{(1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t))^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{(1 - \cos t)^2}}.$$

Per il metodo di sostituzione degli infinitesimi, $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Pertanto il limite diventa:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt[3]{\frac{t^4}{4}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{4}{t}} = \pm\infty$$

Domanda N°3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} dx$$

Soluzione

Poniamo $t = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$: pertanto $x = t^3 + 2$, $dx = 3t^2 dt$. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^4}{t^2 + 3} dt &= \int 3t^2 - 9 + \frac{27}{t^2 + 3} dt = t^3 - 9t + \frac{27}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c = \\ &= x - 2 - 9\sqrt[3]{x-2} + 9\sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}}\right) + c\end{aligned}$$

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^2 - 1}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi, determinare gli eventuali asintoti e classificare i punti di discontinuità;
6. calcolare la derivata prima, classificare i punti di non derivabilità e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzione

Osserviamo che $f(x) = \frac{|x(x-1)|}{(x+1)(x-1)} = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } x < 0 \cup x > 1 \\ -\frac{x}{x+1} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$

1. $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2. $f(0) = 0$ ed è l'unica intersezione con l'asse x.
3. La funzione non presenta simmetrie.
4. $f(x) > 0$ se $x < -1 \cup x > 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, pertanto la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale e non vi sono asintoti obliqui.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Il punto $x_0 = 1$ presenta una discontinuità asintotica (la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto orizzontale)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Il punto $x_0 = -1$ presenta una discontinuità a salto.

6.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x < 0 \cup x > 1 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La funzione è crescente per $x < 0 \cup x > 1$, decrescente per $0 < x < 1$.

$$f'_-(0) = 1 \neq -1 = f'^+(0).$$

La funzione presenta in $x_0 = 0$ un punto di massimo relativo non stazionario (è un punto angoloso).

7.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x+1)^3} & \text{se } x < 0 \cup x > 1 \\ \frac{2}{(x+1)^3} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La funzione è convessa per $x < -1 \cup 0 < x < 1$, concava per $-1 < x < 0 \cup x > 1$

8. Ecco il grafico della funzione.

