Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2015 - 2016$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1

Scegliamo a caso 4 persone da un gruppo di 14 studenti universitari, dei quali 3 sono matricole, 4 sono al secondo anno, 4 al terzo anno e 3 al quarto. Calcolare la probabilità che verranno scelte:

1. una persona per ogni tipo;
2. 2 persone del secondo anno e due del terzo;
3. sono uno al secondo anno o al terzo anno.

Risposta

1. $P_1 = \frac{4^2 \cdot 3^2}{\binom{14}{4}} = \frac{144}{1001}$
2. $P_2 = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{14}{4}} = \frac{36}{1001}$
3. $P_3 = \frac{8 \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{160}{1001}$

Domanda N°2

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

Soluzioni

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 - 1 + \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{-\frac{\sin x}{\sin x - x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{-\frac{x}{\sin x - x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = e^{-1}$$

Domanda N°3

Calcolare

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$$

Soluzioni

Operiamo la sostituzione $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = t$, da cui $x+\sqrt{1+x^2} = e^t$, $\sqrt{1+x^2} = e^t - x$, $1+x^2 = e^{2t} + x^2 - 2xe^t$. Vale che $x = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$, $dx = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)dt$.

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = \int \frac{1}{2}t(e^t+e^{-t})dt = \frac{t}{2}(e^t-e^{-t}) - \int \frac{1}{2}(e^t-e^{-t})dt = \frac{t}{2}(e^t-e^{-t}) - \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) + c$$

$$= \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}{2} + c =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - x^3 + c$$

Domanda N°4

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{|x-1|} + \ln|x-1|$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
3. determinarne la positività;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. studiarne il comportamento agli estremi e determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
8. darne un grafico approssimato.

Soluzioni

1. $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $f(0) = 1$. Per determinare le intersezioni con l'asse x e il segno, si rimanda allo studio della derivata prima.
3. La funzione non presenta simmetrie.
4. $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} + \frac{\ln(x-1)}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} + \ln(x-1) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{-x^2+x} + \frac{\ln(-x+1)}{x} = -1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{x-1} + \ln(-x+1) = +\infty$. Dunque, l'unico asintoto è quello verticale e ha equazione $x = 1$.
5. Se $x > 1$, $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{=}\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0$ se $x = 2$, $f'(x) > 0$ se $x > 2$ e $f'(x) < 0$ se $1 < x < 2$. Pertanto $x = 2$ è un punto di minimo relativo e $f(2) = 5 > 0$.

   Se $x < 1$, $f'(x) = -\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{=}\frac{-x^2+3x}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0$ se $x = 0$, $f'(x) > 0$ se $0 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Pertanto $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Osserviamo quindi che la funzione è sempre positiva e non ammette punti di intersezione con l'asse x.
6. Se $x > 1$, $f''(x) = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$. $f''(5) = 0$, la funzione è convessa per $1 < x < 5$ e concava per $x > 5$. Se $x < 1$, $f''(x) = \frac{-x-3}{(x+1)^3}$, $f''(-3) = 0$, la funzione è convessa per $-3 < x < 1$ e concava per $x < -3$.

7. Ecco il grafico approssimato della funzione: