Soluzioni compito 15.01.2013

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Supponendo che la probabilità di centrare un bersaglio sia pari a $p = 0.1$ e che gli esiti dei tiri siano indipendenti, calcolare la probabilità:

1. di fare un solo centro in 8 lanci;
2. di fare almeno tre centri in 6 lanci;
3. di fare al massimo quattro centri in 5 lanci.

Svolgimento Se X rappresenta la variabile aleatoria che conta il numero di successi in n lanci, si ha che $X \equiv Bin(n, \frac{1}{10})$

1. Essendo $n = 8$, $P(X = 1) = \binom{8}{1}\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^7 = 0.383$
2. Essendo $n = 6$, $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^6 = 0.531$$

$$P(X = 1) = \binom{6}{1}\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^5 = 0.354$$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0.098$$

perciò $P(X \geq 3) = 0.017$

3. Essendo $n = 5$, $P(X \geq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - (0.1)^5 = 0.9999$

Domanda N°2 Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(1 + \sin x)}$$

Svolgimento

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{\ln(1 + \sin x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\sin x\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}} = 1$$

Domanda N°3 Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^e \frac{1}{x(3 + \ln x)^2}dx$$

Svolgimento

$$\int_1^e \frac{1}{x(3 + \ln x)^2}dx = -\frac{1}{3 + \ln x}|_1^e = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

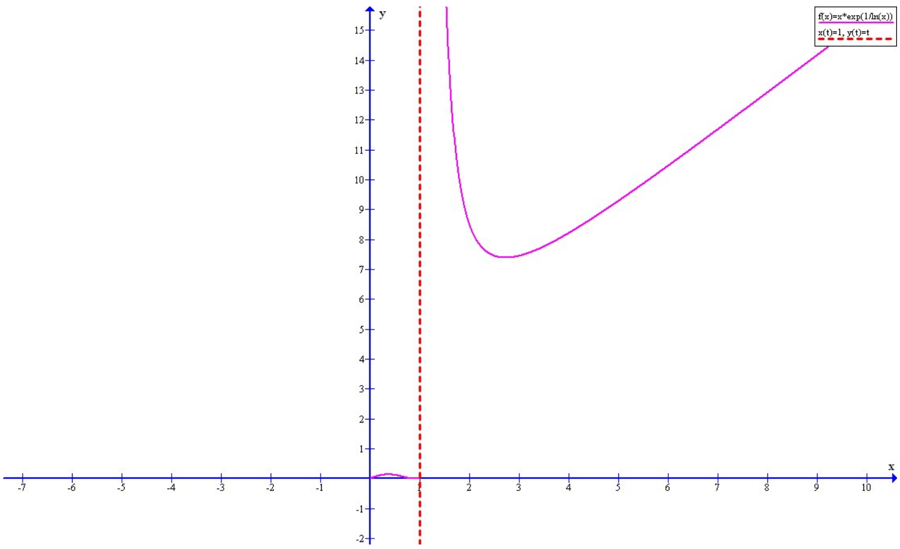
$$f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. determinarne la positività e le intersezioni con gli assi;

3. studiarne il comportamento agli estremi;
4. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
5. studiarne le eventuali simmetrie;
6. determinare gli eventuali asintoti;
7. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
8. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
9. darne un grafico approssimato.

Svolgimento

1. $D = Dom_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \cap x \neq 1\}$
2. La funzione $f(x)$ è sempre positiva per ogni $x \in D$. Non vi sono intersezioni con gli assi.
3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
4. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot 1 = 0$, mentre $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ non esiste. Inoltre $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. Pertanto $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ sono punti di discontinuità di seconda specie.
5. La funzione non è chiaramente né pari né dispari dato che non è definita per x negativi.
6. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale. Rimane da verificare se esistono asintoti obliqui:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{\ln x}} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim x \to +\infty \frac{e^{\frac{1}{\ln x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}} \frac{x}{\ln^2 x}.$$
Dato che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln^2 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2 \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, si ha che
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - x = +\infty$$
e la funzione non ha quindi asintoti obliqui.
7. $$f'(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \frac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x}.$$
Risulta che $f'(x) = 0$ per $\ln x = \pm 1$, ossia per $x = e$ e $x = e^{-1}$; f(x) è crescente per $0 < x < e^{-1}$ e $x > e$. Il punto $x = e^{-1}$ è un punto di massimo relativo mentre $x = e$ di minimo relativo. Osserviamo che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1$
8. $$f''(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x + 1}{x \ln^4 x}$$
La funzione ammette $x = e^{1 \pm \sqrt{2}}$ come punti di flesso. La funzione è convessa negli intervalli $[e^{1-\sqrt{2}}, 1) \cup (1, e^{1+\sqrt{2}}]$
9. Ecco il grafico della funzione:


f(x)=x*exp(1/ln(x))
x(t)=1, y(t)=t
x
y