

# NIKOLAJ NIKOLAEVICH BOGOLYUBOV E IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

GIULIA FANTI - ELVIRA MASCOLO

*L'anima dell'uomo ha tre chiavi che aprono tutto:  
la cifra, la lettera, la nota. Sapere, pensare, sognare.*

*Victor Hugo*

## 1. INTRODUZIONE

Tra il 1928 e il 1929, un giovane matematico russo di nome Nikolaj Nikolaevich Bogolyubov, scrive un articolo su alcuni nuovi metodi del Calcolo delle Variazioni, probabilmente sotto la direzione di Leonida Tonelli.

N.N. Bogolyubov aveva cominciato a studiare matematica a 13 anni sotto la guida del grande matematico e fisico Nikolaj Krylov (1879-1955) e due anni dopo aveva pubblicato il suo primo articolo scientifico.

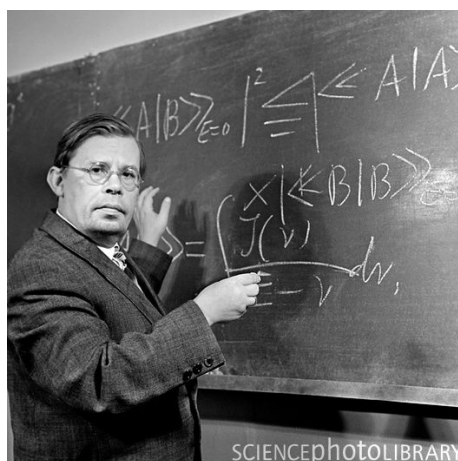
In quegli anni vi era un grande fervore in Italia su questioni di Analisi Reale, in particolare a Bologna dove la grande tradizione dell'Analisi Matematica era iniziata con le ricerche di Cesare Arzelà (1847-1912), allievo di Ulisse Dini, che negli anni del suo trasferimento all'Università di Bologna, cominciò ad occuparsi di funzioni di variabile reale. Fra gli allievi di Arzelà, ci furono Giuseppe Vitali (1875-1932) e Leonida Tonelli (1885-1946).

Nel 1928 si tenne appunto a Bologna il Congresso Internazionale dei Matematici (il secondo in Italia), di cui il Duce Benito Mussolini fu nominato Presidente del Comitato d'onore.

Al Congresso parteciparono i più grandi matematici del tempo: G. Castelnuovo, J. Hadamard, M. Fréchet, D. Hilbert, W.H. Young, V. Volterra (ancora non invisato al governo fascista), N. Krylov e naturalmente lo stesso Tonelli.

La conferenza di Tonelli, dal titolo *'Il contributo italiano alla teoria delle funzioni di variabili reali'*, segnò per alcuni storici la definitiva affermazione delle sue ricerche nell'ambito della teoria moderna del Calcolo delle Variazioni.

Tonelli era arrivato a Bologna nel 1922 e in quegli anni il suo nome aveva una risonanza internazionale, grazie alla pubblicazione tra il 1911 e il 1915



di una serie di articoli fondamentali sul Calcolo delle Variazioni. A Tonelli, in particolare, spetta il merito di essere stato il primo a sviluppare lo studio sistematico dei funzionali integrali con il procedimento denominato dei *Metodi Diretti*.

Tale procedimento era nato alla fine del 1800 da un'idea di Riemann (*Principio di Dirichlet*) per passare dallo studio della risoluzione di un problema differenziale (esistenza della soluzione dell'equazione di Laplace  $\Delta u = 0$ , con  $u = g$  sulla frontiera) a quello di un problema di minimo (esistenza del minimo nella stessa classe dell'integrale associato  $\int_{\Omega} |Du|^2 dx$ ).

L'opera di Tonelli ebbe piena risonanza nel periodo fra le due guerre; infatti i due volumi del suo 'Fondamenti del Calcolo delle Variazioni' ([21]), il primo del 1921 ed il secondo del 1923, seppur con alcune limitazioni relative allo studio degli integrali multipli, rappresentano l'inizio del moderno Calcolo delle Variazioni, dal momento che stabilirono il pieno riconoscimento della semicontinuità come la proprietà principale per dimostrare l'esistenza di un minimo nei funzionali integrali.

I Metodi Diretti permettono di dimostrare l'esistenza del minimo per funzionali della forma

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx, \quad (1.1)$$

attraverso la seguente generalizzazione del teorema di Weierstrass:

*Se il funzionale (1.1), definito in uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è semicontinuo inferiormente rispetto a  $\tau$  ed esiste una successione minimizzante compatta nella stessa topologia, allora  $I$  ammette minimo in  $X$ .*

Tonelli ha dimostrato anche che la semicontinuità del funzionale in (1.1) è strettamente legata alla *convessità* della funzione  $f = f(x, u, u')$  rispetto all'ultima variabile  $u'$ , come chiariremo nel seguito.

Non siamo riuscite a stabilire con esattezza se Tonelli abbia mai incontrato il giovane Bogolyubov, ma alcuni viaggi a Mosca fanno pensare che Tonelli avesse contatti con il suo maestro. Possiamo ipotizzare che Tonelli abbia assegnato al giovane allievo il compito di studiare *il problema non convesso* ovvero studiare le proprietà del funzionale (1.1) non assumendo la convessità della funzione  $f$  rispetto a  $u'$  e quindi facendo a meno della semicontinuità del funzionale  $I$ .

Le idee e i risultati di Bogolyubov sono raccolti in due articoli pubblicati sugli Annali di Matematica Pura e Applicata, il primo [3], nel 1930 dal titolo '*Sur quelques méthodes nouvelles dans le Calcul des Variations*' ed il secondo [4], '*Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*', nel 1931.

Nell'introduzione del primo articolo [3], l'autore ringrazia Tonelli per i suoi suggerimenti e commenti; in particolare scrive

*Vorrei anche ringraziare il Prof. L. Tonelli per il suo incoraggiamento e per la sua attenta e perspicace critica di questo lavoro, che mi ha permesso di migliorarlo sotto molti aspetti.*

Il contributo del primo dei due articoli è a nostro avviso di grande interesse non solo scientifico ma anche storico, in quanto rappresenta il primo studio

in letteratura su funzionali integrali non convessi.

A partire da un funzionale della forma (1.1), con  $f$  non convessa nella terza variabile, Bogolyubov, con un procedimento completamente originale, riesce a costruire un funzionale convesso, legato a quello di partenza, che nel linguaggio moderno prenderà il nome di *rilassato* e stabilisce un teorema di uguaglianza degli estremi inferiori, che nella moderna terminologia viene denominato *di rilassamento*.

Inoltre fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il problema di minimo non convesso abbia soluzione ed infine un risultato di regolarità parziale per tali minimi.

Nel 1929, l'autore ottiene, per il secondo articolo [4], il Premio 'Adolfo Merlani' per le Matematiche conferito dall'Accademia delle Scienze di Bologna. Nel verbale della riunione del 24 Novembre 1929 la commissione, composta da L. Tonelli, P. Burgatti e E. Bartolotti, scrive:

*...l'importanza e la difficoltà dell'argomento trattato, i metodi seguiti ed i risultati ottenuti rendono il lavoro di N.N. Bogolyubov, degno di essere messo a concorso.*

Sebbene le dimostrazioni e le tecniche utilizzate rappresentavano, e rappresentano a tutt'oggi, una vera novità nell'ambito del Calcolo delle Variazioni, l'articolo non ha avuto, a nostro avviso, la considerazione che meritava; probabilmente perché Bogolyubov, poco dopo averlo scritto, si dedica interamente a questioni di fisica matematica e teorica, ottenendo anche in questi campi risultati di altissimo livello, come metteremo in evidenza nell'ultimo paragrafo in cui esponiamo la sua vita e l'opera scientifica.

La prima citazione dell'articolo di Bogolyubov del 1929 si trova nell'articolo di A.D. Ioffe and V.M. Tikhomirov, [13] nel 1968 (si tratta della traduzione dal russo pubblicata su Russian Mathematical Surveys) e gli autori scrivono:

*...il primo risultato (di rilassamento) è stato ottenuto da Bogolyubov in [3], il quale ha dimostrato che, sotto "naturali" condizioni, la funzione non-convessa del più semplice problema variazionale di Dirichlet*

$$\inf \left\{ \int_a^b f(x, u, u') dx, \quad u(a) = A, \quad u(b) = B \right\},$$

*può essere sostituita da una funzione convessa: la coniugata seconda di  $f$  rispetto a  $u'$ .*

Lo studio dei funzionali non convessi ha assunto grande rilevanza alla fine degli anni settanta, per il suo collegamento con la teoria dell'elasticità non lineare (si veda ad esempio [1], [10]). Vale la pena osservare che lo studio dei funzionali non convessi continua ancora oggi e molti problemi non hanno ancora trovato una completa soluzione.

Questo articolo non ha la pretesa di essere un saggio sulla storia del Calcolo delle Variazioni e nemmeno una biografia di Bogolyubov, che richiederebbero un altro genere di competenze e metodi. A questo proposito va sottolineato che la bibliografia dell'articolo è quasi completamente di tipo matematico e trascura gli aspetti storici del calcolo delle variazioni.

Questa breve nota intende raccontare la storia di un giovanissimo e geniale matematico, che alla fine degli anni venti ha studiato un problema che più di quarant'anni dopo sarebbe diventato di grande attualità. L'importanza dei suoi risultati è testimoniata dalla quantità di autori che negli anni successivi li hanno ritrovati in ambiti differenti e ridimostrati con tecniche moderne.

Ci è sembrato utile e interessante presentare in forma organizzata i risultati ottenuti dal giovane Bogolyubov al fine di stimolare nuovi spunti di riflessione per lo studio dei problemi non convessi.

## 2. METODI DIRETTI

Il Calcolo delle Variazioni è il settore dell'Analisi Matematica che si occupa della determinazione e dell'analisi dei valori massimi e minimi di applicazioni reali definite in classi di funzioni e che hanno una forma integrale.

Ad esempio, se  $u$  appartiene ad un'opportuna classe di funzioni ammissibili definite nell'intervallo  $[a, b]$ , una tale applicazione ha la forma (1.1), dove  $f(x, y, z) : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

I metodi seguiti per trovare massimi e minimi di funzionali di questo tipo, vengono comunemente divisi in *Classici* e *Diretti*.

Il Metodo Classico si è sviluppato a partire dalla fine del 1600, grazie alle ricerche dei due fratelli Bernoulli, di Eulero e di Lagrange e consiste nel determinare le condizioni necessarie che un minimo deve soddisfare ed è legato allo studio della *variazione prima* del funzionale che, per la forma integrale del funzionale, conduce ad un'equazione differenziale, nota come *Equazione di Eulero-Lagrange*.

I Metodi Diretti, sviluppati a partire dalla fine dell'800, si basano sulla nozione di semicontinuità inferiore, un'opportuna generalizzazione del teorema di Weierstrass e la convergenza delle successioni minimizzanti.

All'inizio del 1900 il Calcolo delle Variazioni era considerato uno dei problemi più interessanti della matematica. Al Secondo Congresso Internazionale di Matematica, tenutosi a Parigi nell'agosto del 1900, D. Hilbert, uno dei matematici più importanti di quel periodo, nella sua relazione, tentò di prevedere la direzione dei futuri progressi nella matematica e formulò 23 problemi, che a suo giudizio avrebbero impegnato l'attenzione dei matematici del XX secolo. Di questi ben tre il 19, il 20 ed il 23, riguardavano il Calcolo delle Variazioni. Ci sembra interessante riportare l'inizio della sua conferenza

*Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro; di gettare uno sguardo ai prossimi sviluppi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire? Quali saranno le mete verso cui tenderà lo spirito delle future generazioni di matematici? Quali metodi, quali fatti nuovi schiuderà il nuovo secolo nel vasto e ricco campo del pensiero matematico?*

L'intuizione di Hilbert si è poi rivelata profetica: la teoria che nel 1900 era appena agli inizi, si è poi sviluppata in direzioni che Hilbert non avrebbe sicuramente mai immaginato, partendo dalle ricerche di Tonelli, per arrivare al grande sviluppo dell'Analisi Funzionale con la nozione di topologia debole

e all'introduzione degli spazi di Sobolev. In letteratura si possono trovare numerosissimi testi sul Calcolo delle Variazioni; per maggiori approfondimenti rimandiamo ad esempio a [5], [6], [12] e [7].

Diamo qualche definizione preliminare. Sia  $X$  uno spazio metrico e  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale.

**Definizione 2.1.** *Il funzionale  $I$  si dice sequenzialmente semicontinuo inferiormente se per ogni successione  $\{x_n\}$  che converge a  $x$ , si ha*

$$I(x) \leq \liminf_n I(x_n).$$

Consideriamo il seguente problema di minimo in  $X$ : esiste  $\bar{x}$  tale che

$$I(\bar{x}) = \inf\{I(x) : x \in X\}. \quad (2.1)$$

Valgono i seguenti risultati.

**Teorema 2.1** (Weierstrass). *Assumiamo che*

- (2.1)  *$I$  sia limitato inferiormente;*
- (2.2)  *$I$  sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente;*
- (2.3)  *$X$  sia sequenzialmente compatto.*

*Allora esiste il minimo di  $I(x)$  al variare di  $x \in X$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$m = \inf_X I(x) > -\infty.$$

Consideriamo  $\{x_n\} \subset X$  una successione minimizzante di  $I$  in  $X$ , cioè tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n) = \inf_{x \in X} I(x) = m.$$

Per la compattezza di  $X$  esiste un'estratta  $\{x_{n_k}\}$  convergente a  $\bar{x} \in X$ , e dalla semicontinuità inferiore di  $I$  si ha

$$I(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n) = \inf_{x \in X} I(x),$$

e quindi  $\bar{x}$  è la soluzione del problema (2.1). □

**Teorema 2.2** (Metodi Diretti). *Siano  $X$  uno spazio metrico e  $I$  un funzionale limitato inferiormente, sequenzialmente semicontinuo inferiormente. Inoltre supponiamo  $I$  coercitivo cioè che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  esista  $K_t \subset X$  chiuso e compatto tale che*

$$\{x \in X : I(x) \leq t\} \subseteq K_t,$$

*allora esiste un punto di minimo per  $I$  in  $X$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $t \in \mathbb{R}$  tale che  $\inf_X I(x) < t$ . Per l'ipotesi di coercitività di  $I$

$$\{x \in X : I(x) \leq t\} \subseteq K_t. \quad (2.2)$$

Per il teorema 2.1 il funzionale  $I$  ristretto a  $K_t$  ammette un punto di minimo, ovvero esiste  $\bar{x} \in K_t$  tale che per ogni altro  $y \in K_t$  vale  $I(\bar{x}) \leq I(y)$  e  $I(\bar{x}) \leq t$ . Dal momento che per ogni  $y \in X \setminus K_t$  si ha  $I(y) > t$  segue che  $\bar{x}$  è un minimo di  $I$  in  $X$ . □

## 3. SEMICONTINUITÀ E TEOREMA DI TONELLI

Il riconoscimento della semicontinuità come proprietà generale che permette di dimostrare l'esistenza di minimo per funzionali integrali è dovuto a Tonelli, che in [21] osserva:

*Se si richiede la proprietà di continuità per l'integrale, si trova che si possono considerare solo integrali che sono lineari nella pendenza della curva di integrazione ( $u'(x)$ ). . . se invece si introduce una nuova teoria basata sul concetto più generale della semicontinuità allora una vasta classe di integrali può essere considerata.*

Quindi se si considera l'integrale in (1.1) sotto opportune ipotesi, peraltro assai generali, la condizione necessaria e sufficiente per la continuità rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni ammissibili  $u$ , è la linearità di  $f(x, u, u')$  rispetto ad  $u'$ :  $f(x, u, u') = P(x, u)u' + Q(x, u)$ .

Il teorema di esistenza di Tonelli considera come spazio delle funzioni ammissibili quello delle funzioni assolutamente continue, secondo la seguente definizione dovuta a Vitali.

**Definizione 3.1.** *Una funzione  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è detta assolutamente continua se per ogni  $\varepsilon$  esiste un  $\delta$  tale che, per ogni collezione finita  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$  di sottointervalli due a due disgiunti di  $[a, b]$  con  $\sum (y_i - x_i) < \delta$  vale*

$$\sum_{i=1}^n |u(y_i) - u(x_i)| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Denotiamo con  $AC(a, b)$  la classe delle funzioni assolutamente continue definite sull'intervallo  $(a, b)$ . Dalla definizione segue che ogni  $u \in AC(a, b)$  è uniformemente continua in  $(a, b)$  e quindi può essere estesa con continuità in  $[a, b]$ .

Ricordiamo anche la definizione di funzione convessa.

**Definizione 3.2.** *Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è detta convessa se per ogni  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  vale*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Se  $f$  è una funzione derivabile, allora condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia convessa è che per ogni  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  risulti

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1). \quad (3.2)$$

Utilizzando il classico teorema di compattezza di Giulio Ascoli (1843-1896) e Cesare Arzelà (1847-1912), Tonelli ha dimostrato il seguente teorema di esistenza:

**Teorema 3.1.** *Sia  $f(x, y, z)$  una funzione continua insieme alla sua derivata  $f_z(x, y, z)$  nell'insieme  $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Supponiamo che per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $y \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{R}$  valgano*

- $f(x, y, z) \geq K|z|^p + \beta$ , con  $K > 0$  e  $p > 1$ ;
- $f(x, y, z)$  è convessa in  $z$  per ogni  $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ .

Allora il funzionale

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx, \quad (3.3)$$

ammette minimo nella classe  $D = \{u \in AC(a, b) : u(a) = A, u(b) = B\}$ .

Dalla prima condizione segue che  $I$  è limitato inferiormente e che ogni successione minimizzante ha un'estratta che converge uniformemente mentre l'ipotesi di convessità della funzione  $f$  rispetto all'ultima variabile assicura la semicontinuità del funzionale  $I$  rispetto alla convergenza uniforme.

Inoltre Tonelli dimostra che la convessità della funzione  $f = f(x, u, z)$  rispetto a  $z$  è anche condizione necessaria. Vale la pena riportare la dimostrazione di questa condizione necessaria per sottolineare il rilievo della condizione di convessità.

**Teorema 3.2.** *Se il funzionale  $I$  definito dalla (3.3) è sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia della convergenza uniforme, allora  $f(x, y, z)$  è convessa in  $z$ .*

*Dimostrazione.* Per semplicità consideriamo il caso in cui la funzione  $f = f(z)$  (il caso generale segue considerando  $f = f(x_0, y_0, z)$ , con  $(x_0, y_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}$  fissati). Sia dunque  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che il funzionale

$$I(u) = \int_a^b f(u'(x)) dx$$

risulti sequenzialmente semicontinuo inferiormente. Dobbiamo dimostrare che per  $z_1$  e  $z_2$  in  $\mathbb{R}$  e  $\lambda \in (0, 1)$ , vale

$$f((1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2) \leq (1 - \lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2). \quad (3.4)$$

Sia  $z_0 = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2$ , ponendo  $u_0(x) = c_0 + z_0(x - (a + b))$ , si ha  $I(u_0) = f(z_0)(b - a)$ . Dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali e definiamo

$$u_i^n(x) = \begin{cases} u_0(\alpha_i^n) + z_1(x - \alpha_i^n) & x \in [\alpha_i^n, \lambda\alpha_i^n + (1 - \lambda)\alpha_{i+1}^n] \\ u_0(\alpha_{i+1}^n) + z_2(x - \alpha_{i+1}^n) & x \in [\lambda\alpha_i^n + (1 - \lambda)\alpha_{i+1}^n, \alpha_{i+1}^n] \end{cases}$$

con

$$\alpha_i^n = a + i \cdot \frac{b - a}{n}, \quad n = 0, 1, \dots, n$$

e

$$u_n(x) = u_i^n(x), \quad x \in [\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n].$$

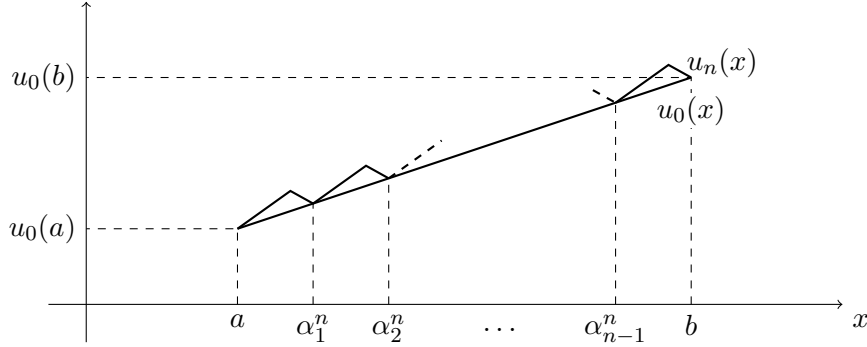
In figura 1 sono riportati i grafici di  $u_0(x)$  e  $u_n(x)$ .

Calcoliamo il valore del funzionale  $I$  su  $u_n$ :

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i^n}^{\alpha_{i+1}^n} f(u_n') dx = \sum_{i=0}^{n-1} [(1 - \lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)] (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) \\ &= [(1 - \lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)] (b - a). \end{aligned}$$

Fissiamo  $n$  e sia  $x \in [a, b]$ . In particolare esiste un  $i$  per cui  $x \in [\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n]$  e poiché  $u_0(\alpha_i^n) = u_n(\alpha_i^n)$  si ha

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq |u_n(x) - u_n(\alpha_i^n)| + |u_0(\alpha_i^n) - u_0(x)|.$$

FIGURA 1. Grafici di  $u_0$  e  $u_n$ .

Dal momento che  $u_0$  e  $u_n$  hanno derivata uniformemente limitata, esiste  $C > 0$  tale che

$$|u_n(x) - u_0(x)| < C|x - \alpha_i^n| \leq C \frac{b-a}{n}$$

e dunque  $u_n$  converge uniformemente a  $u_0$  in  $[a, b]$ . Sfruttando la semicontinuità del funzionale  $I$  segue (3.4).  $\square$

#### 4. RILASSAMENTO E PROBLEMI NON CONVESSI

**4.1. Rilassamento.** Supponiamo che  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  sia un funzionale coercitivo non semicontinuo inferiormente nello spazio metrico  $X$ ; è possibile associare ad  $I$  un nuovo funzionale, detto *rilassato* di  $I$  secondo la seguente definizione.

**Definizione 4.1.** Si definisce il rilassato di  $I$  e si indica con  $\bar{I}$  il funzionale

$$\bar{I}(x) = \sup_{G \in \mathcal{S}_I} G(x), \quad (4.1)$$

dove  $\mathcal{S}_I$  è l'insieme dei funzionali  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinui inferiormente e minori o uguali a  $I$ .

Osserviamo che  $\bar{I}$  definito in (4.1) risulta semicontinuo inferiormente in  $X$  in quanto estremo superiore di funzionali semicontinui. Vale il seguente teorema:

**Teorema 4.1.** Il funzionale  $\bar{I}$  è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- per ogni successione  $\{x_k\}$  convergente a  $x$  si ha

$$\bar{I}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k);$$

- per ogni  $x \in X$  esiste una successione  $\{x_k\}$  convergente a  $x$  tale che

$$\bar{I}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(x_k);$$

- $\bar{I}(x)$  è l'estremo inferiore dei  $\liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k)$  fatto su tutte le successioni  $\{x_k\}$  che convergono a  $x$ , quindi

$$\bar{I}(x) = \inf_{\{x_k\}} \{ \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k) : x_k \rightarrow x \};$$



- vale il seguente **Risultato di Rilassamento**:

$$\inf_X I(x) = \inf_X \bar{I}(x). \quad (4.2)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_k\}$  una successione che converge a  $x$ . Sfruttando il fatto che  $\bar{I} \leq I$  e che  $\bar{I}$  è semicontinuo inferiormente, si ha

$$\bar{I}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{I}(x_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k).$$

Dalla definizione di  $\bar{I}$ , segue che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $\{x_k\}$  tale che

$$I(x_k) \leq \bar{I}(x) + \frac{1}{k}.$$

Passando al limite superiore si ha

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} I(x_k) \leq \bar{I}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k) \Rightarrow \bar{I}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(x_k).$$

Indichiamo con

$$G(x) = \inf_{\{x_k\}} \{ \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k) : x_k \rightarrow x \}.$$

È facile verificare che  $G$  è un funzionale semicontinuo inferiormente.

Dalla prima condizione si ha  $\bar{I}(x) \leq G(x)$ . Dalla seconda segue che per ogni  $x$  esiste  $\{x_k\}$  tale che

$$\bar{I}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(x_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_k) \geq G(x).$$

Proviamo l'uguaglianza (4.2). Dal momento che per ogni  $x$  esiste una successione  $\{x_k\}$  che converge a  $x$  per cui

$$\bar{I}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(x_k) \geq \inf_X I(x), \quad (4.3)$$

passando all'estremo inferiore si ottiene  $\inf_X I(x) \leq \inf_X \bar{I}(x)$ . L'altra disuguaglianza segue dal fatto che  $I(x) \geq \bar{I}(x)$ .  $\square$

Dalle proprietà del funzionale rilassato, segue che se  $I$  è coercitivo anche  $\bar{I}$  ha la stessa proprietà. Vale quindi:

**Teorema 4.2.** *Se  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale coercitivo e  $I(x) \neq +\infty$ , allora esiste un punto  $\bar{x}$  di minimo in  $X$  per il funzionale rilassato  $\bar{I}$  e*

$$\inf_X I(x) = \min_X \bar{I}(x) = I(\bar{x}). \quad (4.4)$$

*Inoltre*

- ogni successione minimizzante  $\{x_k\}$  per  $I$  ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di minimo di  $\bar{I}$ ;
- per ogni punto di minimo  $\bar{x}$  di  $\bar{I}$  esiste una successione minimizzante di  $I$  che converge a  $\bar{x}$ .

Osserviamo che la costruzione del problema rilassato non è unica.

Uno dei problemi più interessanti della teoria del rilassamento è quello relativo alla rappresentazione del funzionale rilassato di un funzionale del Calcolo delle Variazioni, più precisamente quello di stabilire le condizioni sull'integranda  $f$  affinché esista una funzione  $g = g(x, u, u')$  tale che il funzionale

rilassato del funzionale integrale (1.1) abbia ancora forma integrale:

$$\bar{I}(u) = \int_a^b g(x, u, u') dx.$$

**4.2. Problemi non convessi.** Il teorema di Tonelli mette in evidenza il ruolo fondamentale che gioca la convessità della funzione integranda per ottenere la semicontinuità per i funzionali integrali, tuttavia la semicontinuità inferiore non è una condizione necessaria per l'esistenza del minimo.

Lo studio del problema dell'esistenza di minimi per funzionali non convessi si sviluppa intorno agli anni '80, in seguito ad alcuni articoli di J. Ball [1] relativi a questioni di elasticità non lineare. In particolare J. Ball aveva provato che in questa teoria la convessità della funzione densità d'energia rispetto all'ultima variabile non è un'ipotesi fisicamente accettabile.

Molti e differenti sono i risultati di esistenza di minimo per funzionali non convessi trovati negli ultimi anni. Nel seguito riportiamo il risultato di esistenza dovuto a P. Marcellini [16] nel 1980.

Assegnata una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)t^{-1} = +\infty \quad (4.5)$$

si consideri il funzionale integrale

$$I(u) = \int_a^b f(u'(x)) dx.$$

In [16] si prova che il funzionale non convesso  $I$  ha sempre minimo nella classe di funzioni

$$\mathcal{A} = \{u \in C^{0,1}[a, b] : u(a) = A, u(b) = B\}.$$

Denotata con  $f^{**}$  la più grande funzione convessa che minora  $f$  definiamo in  $\mathcal{A}$  il funzionale convesso

$$I^{**}(u) = \int_a^b f^{**}(u'(x)) dx.$$

Sia  $t_0 = \frac{B-A}{b-a}$ ; dalla disuguaglianza di Jensen si ha

$$\int_a^b f^{**}(u'(x)) dx \geq (b-a) f^{**}\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u'(x) dx\right) = (b-a) f^{**}(t_0). \quad (4.6)$$

Definita la funzione

$$u_0(x) = t_0(x-a) + A,$$

è immediato verificare che  $u_0$  realizza il minimo per  $I^{**}$ , dal momento che  $I^{**}(u_0) = (b-a) f^{**}(t_0)$ .

Si possono verificare due casi:  $f^{**}(t_0) = f(t_0)$  oppure  $f^{**}(t_0) < f(t_0)$ . Nel primo caso

$$I(u_0) = \int_a^b f(t_0) dx = (b-a) f(t_0) = (b-a) f^{**}(t_0) \leq I^{**}(u) \leq I(u)$$

quindi  $u_0$  realizza il minimo anche del problema per  $I$ .

Quando  $f^{**}(t_0) < f(t_0)$ , in virtù della (4.5), esistono  $t_1 < t_0 < t_2$  per cui  $f(t_i) = f^{**}(t_i)$  e  $f^{**}$  nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  è affine, cioè il suo grafico è un segmento di retta.

Dal momento che  $t_1 < t_0 < t_2$ , esiste un  $\vartheta \in (0, 1)$  per cui  $t_0 = \vartheta t_1 + (1 - \vartheta)t_2$  e dalle proprietà di  $f^{**}$

$$f^{**}(t_0) = \vartheta f^{**}(t_1) + (1 - \vartheta)f^{**}(t_2) = \vartheta f(t_1) + (1 - \vartheta)f(t_2).$$

Definiamo la funzione  $u_1(x)$  in modo che  $u_1(a) = A$ ,  $u_1(b) = B$  e che:

$$u_1'(x) = \begin{cases} t_1 & x \in [a, a + \vartheta(b - a)] \\ t_2 & x \in [a + \vartheta(b - a), b]. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u_1') dx &= \int_a^{a+\vartheta(b-a)} f(t_1) dx + \int_{a+\vartheta(b-a)}^b f(t_2) dx \\ &= \vartheta(b-a)f(t_1) + (1-\vartheta)(b-a)f(t_2) \\ &= \vartheta(b-a)f^{**}(t_1) + (1-\vartheta)(b-a)f^{**}(t_2) = f^{**}(t_0)(b-a) = \int_a^b f^{**}(u_0) dx. \end{aligned}$$

Ne segue che per ogni funzione  $u \in \mathcal{A}$  si ha

$$I(u_1) = I^{**}(u_0) \leq I^{**}(u) \leq I(u), \quad (4.7)$$

ovvero  $u_1$  realizza il minimo per  $I$ .

Marcellini individua quindi una classe di funzionali non convessi per la quale è possibile stabilire l'esistenza del minimo con procedimento molto simile a quello contenuto nell'articolo di Bogolyubov e che presentiamo nella prossima sezione.

## 5. RISULTATI DI N.N. BOGOLYUBOV

In questo paragrafo analizziamo nel dettaglio la prima parte dell'articolo [3] in cui Bogolyubov stabilisce per la prima volta in letteratura un teorema di rilassamento. In particolare riscriviamo i risultati ed i metodi in un linguaggio moderno, confrontandoli quindi con quelli ottenuti, anche in ambiti diversi, circa quarant'anni dopo.

Sia  $f = f(x, y, z)$  una funzione due volte derivabile, che soddisfa la condizione di crescita

$$f(x, y, z) \geq k|z|^p, \quad \text{con } k > 0 \text{ e } p > 1. \quad (5.1)$$

Diamo alcune definizioni e notazioni preliminari. Fissati  $x$  e  $y$ , diremo che  $z_0$  corrisponde ad una *direzione forte*<sup>1</sup> se

$$f(x, y, z) - f(x, y, z_0) > (z - z_0)f_z(x, y, z_0), \quad \forall z; \quad (5.2)$$

invece  $z_0$  corrisponde ad una *direzione semiforte* se

$$f(x, y, z) - f(x, y, z_0) \geq (z - z_0)f_z(x, y, z_0), \quad \forall z; \quad (5.3)$$

<sup>1</sup>L'uso del termine direzione è fedele all'articolo di Bogolyubov.

infine denotiamo con  $T$  l'insieme delle *direzioni non forti*, ovvero l'insieme degli  $z_0 \in \mathbb{R}$  per cui esiste  $\bar{z}$  tale che

$$f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z_0) \leq (\bar{z} - z_0)f_z(x, y, z_0). \quad (5.4)$$

Fissati  $x$  e  $y$  denotiamo  $F(z) = f(x, y, z)$  e supponiamo che  $F$  sia non convessa nella variabile  $z$  in un'unica componente connessa.

Individuiamo sul grafico di  $F(z)$  i punti  $P$  e  $Q$  tali che la funzione in quei punti ha la stessa retta tangente. Osserviamo che sia  $P$  che  $Q$  corrispondono a direzioni non forti e dunque appartengono a  $T$ , infatti vale

$$\frac{F(Q) - F(P)}{Q - P} = F'(P) = F'(Q)$$

e in questo caso  $T$  coincide con l'intervallo  $[P, Q]$ .

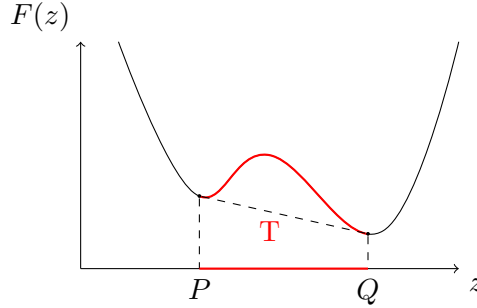


FIGURA 2. Grafico della funzione integranda.

È facile vedere che per ogni punto  $z \in [P, Q]$  la retta tangente al grafico di  $F$  in  $z$  incontra il grafico in almeno un'altro punto, diciamo  $z^*$ , per cui è verificata l'uguaglianza in (5.4) ed invece per  $z \notin [P, Q]$  la retta tangente in  $z$  sta tutta sotto il grafico di  $F$  e dunque vale la (5.2).

Inoltre  $P$  e  $Q$  soddisfano le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} F(P) - F(Q) = F_z(Q)(P - Q) \\ F(Q) - F(P) = F_z(P)(Q - P) \end{cases} \quad (5.5)$$

che implicano  $F_z(P) = F_z(Q)$ .

Quando  $f = f(x, y, z)$  si ha che  $T = [P(x, y), Q(x, y)]$  con  $P = P(x, y)$  e  $Q = Q(x, y)$  funzioni di  $x$  e  $y$ .<sup>2</sup> Supponiamo, per semplicità di esposizione, che per ogni  $t$  corrispondente ad una direzione semiforte si abbia  $f_{zz}(x, y, z) > 0$ ,<sup>3</sup> quindi in particolare si ha

$$f_{zz}(x, y, P(x, y)) > 0, \quad f_{zz}(x, y, Q(x, y)) > 0. \quad (5.6)$$

Dal momento che le funzioni  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  soddisfano il sistema

$$\begin{cases} f(x, y, P(x, y)) - f(x, y, Q(x, y)) = f_z(x, y, Q(x, y))(P(x, y) - Q(x, y)) \\ f(x, y, Q(x, y)) - f(x, y, P(x, y)) = f_z(x, y, P(x, y))(Q(x, y) - P(x, y)) \end{cases}$$

<sup>2</sup> $P$  e  $Q$  è la notazione utilizzata in [3].

<sup>3</sup>Ipotesi contenuta in [3].

sfruttando la (5.6) è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite per concludere che  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sono funzioni di classe  $C^1$  nelle variabili  $x$  e  $y$ .

In generale Bogolyubov osserva che si può dimostrare che per ogni  $x, y$  fissati, l'insieme  $T$  delle direzioni non forti è composto da una successione di intervalli chiusi  $[P_i, Q_i]$  disgiunti determinati dal fatto che in  $P_i$  e in  $Q_i$  il grafico della funzione  $F(z) = f(x, y, z)$  ha la stessa retta tangente.

**5.1. Costruzione della funzione  $f^{**}$ .** Siano  $\bar{x}, \bar{y}, \lambda \in \mathbb{R}$  fissati. Consideriamo il problema di minimo dell'integrale

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, u'(x)) dx$$

nella classe  $\mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda}$  delle funzioni

$$\mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda} = \{u \in AC(\alpha, \alpha + \varepsilon), \text{ tali che } u(\alpha) = \beta, u(\alpha + \varepsilon) = \beta + \lambda\varepsilon\}.$$

Nel seguito denotiamo con  $P = P(\bar{x}, \bar{y})$  e  $Q = Q(\bar{x}, \bar{y})$ . Sia  $u_\lambda(x)$  la funzione tale che per  $\lambda \in [P, Q]$

$$u_\lambda(x) = \begin{cases} \beta + P \cdot (x - \alpha) & \alpha \leq x \leq \alpha + \xi, \\ \beta + \lambda\varepsilon + Q \cdot (x - \alpha - \varepsilon) & \alpha + \xi \leq x \leq \alpha + \varepsilon, \end{cases}$$

con

$$\xi = \frac{Q - \lambda}{Q - P} \varepsilon,$$

e per  $\lambda \leq P$  oppure  $\lambda \geq Q$

$$u_\lambda(x) = \beta + \lambda(x - \alpha).$$

Eseguendo la derivata, si vede che se  $\lambda \in [P, Q]$ ,  $u'_\lambda(x)$  è uguale a  $P$  o  $Q$ , mentre se  $\lambda \notin [P, Q]$ ,  $u'_\lambda(x) = \lambda$ .

Inoltre poiché  $f_z(\bar{x}, \bar{y}, u'_\lambda(x))$  è costante in  $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$ , per ogni  $u \in \mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda}$  si ha

$$\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} (u' - u'_\lambda) f_z(\bar{x}, \bar{y}, u'_\lambda) dx = 0. \quad (5.7)$$

Da (5.7), si ha che per ogni  $u \in \mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda}$ , vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, u') dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, u'_\lambda) dx = \\ \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} [f(\bar{x}, \bar{y}, u') - f(\bar{x}, \bar{y}, u'_\lambda) - (u' - u'_\lambda) f_z(\bar{x}, \bar{y}, u'_\lambda)] dx \geq 0, \end{aligned}$$

dove il segno della disuguaglianza segue dal fatto che  $u'_\lambda$  è una direzione semiforte per  $f$ . Segue che  $u_\lambda$  è un minimo in  $\mathcal{A}_{\varepsilon, \lambda}$  del funzionale non convesso  $I_\varepsilon$ .

**Osservazione 5.1.** *Seppur non esplicitamente scritto nell'articolo, il procedimento di Bogolyubov fornisce un esempio di funzionale in cui la funzione integranda  $f = f(z)$  non è convessa, ma per il quale il minimo esiste.*

Osserviamo più da vicino il procedimento. Se consideriamo una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile e che non sia convessa in un'unica componente connessa. Allora fissati  $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ , il funzionale

$$F(u) = \int_a^b f(u'(x))dx$$

ammette minimo nell'insieme delle funzioni  $u \in AC(a, b)$  tali che  $u(a) = A$  e  $u(b) = B$ , qualunque siano  $A$  e  $B$  reali.

Riapplicando il ragionamento di Bogolyubov appena visto e indicati con  $P$  e  $Q$  i punti tali che in  $(Q, f(Q))$  e  $(P, f(P))$  il grafico della  $f$  ha la stessa retta tangente, si ha che la funzione che rende minimo il funzionale  $F$  cambia a seconda che  $\frac{B-A}{b-a}$  appartenga o meno all'intervallo  $[P, Q]$ .

Il procedimento è analogo a quello di Marcellini, presentato nel precedente paragrafo, in quanto entrambe le ipotesi (quella di Bogolyubov e quella di Marcellini) implicano che se  $f$  e la più grande funzione convessa minorante  $f$  sono diverse in  $\frac{B-A}{b-a}$ , allora tale valore si trova in un intervallo in cui gli estremi hanno la stessa retta tangente.

Va precisato che la dimostrazione di Marcellini è più diretta e generale ( $f$  è solo continua) e che nell'articolo di Bogolyubov l'esistenza del minimo non è esplicitamente menzionata.

Indichiamo ora con  $G(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$  il valore minimo del problema, ovvero

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) = \inf \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, y')dx, \quad y(\alpha) = \beta, \quad y(\alpha + \varepsilon) = \beta + \lambda\varepsilon \right\}.$$

Quando  $\lambda \leq P$  oppure  $\lambda \geq Q$  allora

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, u'_{\lambda}(x))dx = f(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),$$

mentre se  $P \leq \lambda \leq Q$  si ha

$$\begin{aligned} G(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, u'_{\lambda}(x))dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, P) \frac{Q - \lambda}{Q - P} \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(\bar{x}, \bar{y}, Q) \left[ \alpha + \varepsilon - \alpha - \frac{Q - \lambda}{Q - P} \varepsilon \right] \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}, P) \frac{Q - \lambda}{Q - P} + f(\bar{x}, \bar{y}, Q) \frac{\lambda - P}{Q - P}. \end{aligned}$$

Per  $\lambda = z$ ,  $\bar{x} = x$  e  $\bar{y} = y$  resta definita la funzione

$$G(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & z \notin [P, Q] \\ f(x, y, P) \frac{Q-z}{Q-P} + f(x, y, Q) \frac{z-P}{Q-P} & z \in [P, Q] \end{cases} \quad (5.8)$$

dove  $P = P(x, y)$  e  $Q = Q(x, y)$ .

Studiamo le proprietà della funzione  $G$  definita da (5.8). È utile osservare che

$$G(x, y, z) \leq f(x, y, z). \quad (5.9)$$

Infatti per  $z \notin [P, Q]$  le due funzioni  $f$  e  $G$  coincidono, mentre al variare di  $z \in [P, Q]$  la funzione  $G(x, y, z)$  descrive la retta tangente al grafico di  $f(x, y, \cdot)$  comune ai punti  $(x, y, P(x, y))$  e  $(x, y, Q(x, y))$ , la quale si trova sotto il grafico della  $f$  stessa.

Inoltre si ha che la funzione  $G$  è una funzione continua insieme con le derivate prime e risulta convessa, ovvero per ogni  $z_1$  e  $z_2$  vale

$$\frac{G_z(x, y, z_1) - G_z(x, y, z_2)}{z_1 - z_2} \geq 0. \quad (5.10)$$

Siano  $z_1$  e  $z_2$  interni all'intervallo  $[P, Q]$ , in virtù della (5.8) si ha

$$G_z(x, y, z_1) = G_z(x, y, z_2) = \frac{f(x, y, Q) - f(x, y, P)}{Q - P}$$

e dunque si ottiene l'uguaglianza in (5.10). Se  $z_1$  e  $z_2$  sono fuori dall'intervallo, corrispondono a due direzioni forti e possiamo scrivere

$$f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) \geq f_z(x, y, z_1)(z_2 - z_1),$$

$$f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2) \geq f_z(x, y, z_2)(z_1 - z_2);$$

sommando le due disuguaglianze si ottiene

$$0 \geq (z_2 - z_1)(f_z(x, y, z_1) - f_z(x, y, z_2)).$$

Ricordando che per tali valori di  $z$  vale  $f(x, y, z) = G(x, y, z)$  anche in questo caso si ottiene la (5.10).

Supponiamo che  $z_1 \in [P, Q]$  e  $z_2 \notin [P, Q]$ . Si ha

$$G_z(x, y, z_1) = \frac{f(x, y, Q) - f(x, y, P)}{Q - P}, \quad G_z(x, y, z_2) = f_z(x, y, z_2).$$

Pertanto

$$\frac{G_z(x, y, z_1) - G_z(x, y, z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{f(x, y, Q) - f(x, y, P)}{Q - P} - f_z(x, y, z_2) \right)$$

e ancora la (5.10).

Inoltre, si prova facilmente che la funzione  $G$  soddisfa le stesse proprietà di crescita della funzione  $f$ .

Possiamo concludere che la funzione  $G$  definita in (5.8) è la più grande funzione convessa rispetto a  $z$  e minore o uguale di  $f$ , quindi  $G = f^{**}$ .

**5.2. Funzionale rilassato e teorema di rilassamento.** Nel seguito indichiamo con  $\|u\| = \sup |u(x)|$  la norma della convergenza uniforme. Ricordiamo che il funzionale  $I$  ha la forma:

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx, \quad (5.11)$$

e sia  $u_0$  una funzione di classe  $C^1$  a tratti. Indichiamo con

$$i_\varepsilon(u_0) = \inf \{ I(u) : u(a) = u_0(a), u(b) = u_0(b), \|u - u_0\| < \varepsilon \} \quad (5.12)$$

e con

$$H(u_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i_\varepsilon(u_0).$$

Per determinare l'espressione di  $H(u_0)$ , consideriamo

$$J(u) = \int_a^b G(x, u, u') dx.$$

Denotiamo con

$$j_\varepsilon(u_0) = \inf_\varepsilon \{J(u) : u(a) = u_0(a), u(b) = u_0(b), \|u - u_0\| < \varepsilon\}.$$

Dal teorema 3.1 di Tonelli il funzionale  $J$  risulta semicontinuo rispetto alla convergenza uniforme quindi per ogni  $\varepsilon$  esiste una funzione  $u_\varepsilon$  con  $\|u_0 - u_\varepsilon\| < \varepsilon$  che realizza il minimo in (5.12) e quindi tale che

$$j_\varepsilon(u_0) = J(u_\varepsilon).$$

Poiché  $\{u_\varepsilon\}$  converge uniformemente a  $u_0$ , dalla semicontinuità del funzionale  $J$ , si ha:

$$J(u_0) \leq \liminf J(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j_\varepsilon(u_0) \leq J(u_0)$$

e dunque vale l'uguaglianza

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j_\varepsilon(u_0) = J(u_0).$$

Dalla (5.9) segue immediatamente che  $j_\varepsilon(u_0) \leq i_\varepsilon(u_0)$  e passando al limite si ottiene

$$J(u_0) \leq H(u_0). \quad (5.13)$$

Il seguente teorema afferma che (5.13) è di fatto un'uguaglianza:

**Teorema 5.1.** *Sotto le condizioni assegnate su  $f$ , per ogni  $u_0 \in C^1$  a tratti l'integrale*

$$J(u_0) = \int_a^b G(x, u_0, u_0') dx$$

*è uguale al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  della famiglia di estremi inferiori definiti da*

$$i_\varepsilon(u_0) = \inf \{I(u) : u(a) = u_0(a), u(b) = u_0(b), \|u - u_0\| < \varepsilon\}.$$

*Cenno di dimostrazione.* In virtù della (5.13) rimane da dimostrare la disuguaglianza  $H(u_0) \leq J(u_0)$ . Quando  $u_0 \in C^1$ , si riesce a costruire una successione  $\{u_n\}$  che converge uniformemente a  $u_0$ , con  $\|u_n - u_0\| < \varepsilon$  per ogni  $n > n_0$ , e tale che

$$\lim_n I(u_n) = J(u_0).$$

Si ottiene quindi  $i_\varepsilon(u_0) \leq I(u_n)$  e passando al limite su  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha  $H(u_0) \leq J(u_0)$ .

Per studiare il caso in cui  $u_0$  è  $C^1$  a tratti viene utilizzato un opportuno procedimento di approssimazione.  $\square$

Il teorema 5.1 equivale ad affermare che il funzionale convesso  $J$  è il rilassato di  $I$ , ovvero

$$\bar{I}(u_0) = \inf \{ \liminf_n I(u_n) : u_n \in \mathcal{U}(u_0) \} = J(u_0),$$

dove  $\mathcal{U}(u_0)$  denota l'insieme delle successioni  $u_n$  che convergono uniformemente a  $u_0$  e assumono agli estremi gli stessi valori di  $u_0$ . Infatti poiché



$J$  è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme, se  $u_n$  converge uniformemente a  $u_0$  si ha

$$J(u_0) \leq \liminf_n J(u_n) \leq \liminf_n I(u_n).$$

Dal momento che la disuguaglianza sopra vale per ogni  $u_n$ , passando all'estremo inferiore si ha

$$J(u_0) \leq \bar{I}(u_0).$$

Proviamo l'altra disuguaglianza. Indichiamo con  $i_n$  il valore di  $i_\varepsilon$  quando  $\varepsilon = 1/n$ . Per la definizione di estremo inferiore, si ha che per ogni  $n$ , esiste una funzione  $u_n$  che assume gli stessi valori di  $u_0$  agli estremi, tale che  $\|u_n - u_0\| \leq 1/n$  e per cui è verificata la disuguaglianza

$$i_n(u_0) \leq I(u_n) \leq i_n(u_0) + \frac{1}{n} \implies \lim_n I(u_n) = J(u_0).$$

Da questa relazione segue che  $\bar{I}(u_0) \leq J(u_0)$  e dunque l'uguaglianza  $J(u_0) = \bar{I}(u_0)$ .

Vale quindi il seguente risultato di rilassamento:

**Teorema 5.2.** *Definita la classe di funzioni*

$$\mathcal{D} = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, C^1 \text{ a tratti}, u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}, \quad (5.14)$$

si ha la seguente uguaglianza:

$$\inf_{\mathcal{D}} I(u) = \inf_{\mathcal{D}} J(u).$$

*Dimostrazione.* Fissato  $u_0$  con  $u_0(a) = \alpha$  e  $u_0(b) = \beta$  e sia  $\mathcal{D}_\varepsilon(u_0)$  l'insieme delle funzioni  $u \in \mathcal{D}$  che appartengono ad un intorno di  $u_0$  di raggio  $\varepsilon$ , per ogni  $\varepsilon$

$$\inf_{\mathcal{D}} I(u) \leq \inf_{\mathcal{D}_\varepsilon} I(u) \implies \inf_{\mathcal{D}} I(u) \leq \lim i_\varepsilon(u_0) = J(u_0).$$

Questo vale per ogni  $u_0$  e quindi si ha

$$\inf_{\mathcal{D}} I(u) \leq \inf_{\mathcal{D}} J(u)$$

e dunque l'uguaglianza, dal momento che  $I(u) \geq J(u)$ .  $\square$

Osserviamo che nell'articolo di Bogolyubov è anche dimostrato che il funzionale rilassato di  $I$  ha un'espressione integrale.

**Osservazione 5.2.** *La teoria del rilassamento inizia intorno alla fine degli anni '80, per una trattazione completa rimandiamo all'articolo di Ioffe-Tihomirov [13], relativo allo studio dei diversi rilassamenti che si possono costruire a partire da un problema non semicontinuo ed al libro di Ekeland-Témam, [9] che, nello studio del rilassamento per funzionali integrali, utilizza metodi e tecniche di Analisi Convessa.*

**5.3. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza.** Dal risultato precedente seguono alcune condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di minimi per il problema non convesso:

**Teorema 5.3.** *Sia  $\mathcal{D}$  definita in (5.14). Il funzionale  $I$  ammette soluzione nella classe  $\mathcal{D}$  se e solo se fra tutte le funzioni di  $\mathcal{D}$  che realizzano il minimo assoluto di  $J$  esiste  $u_0$ , tale che*

$$I(u_0) = J(u_0). \quad (5.15)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che il problema di minimo per  $I$  abbia soluzione e sia  $u_0$  una funzione che realizza il minimo. Allora

$$\inf_{\mathcal{D}} J(u) \leq J(u_0) \leq I(u_0) = \inf_{\mathcal{D}} I(u) = \inf_{\mathcal{D}} J(u),$$

da cui segue la (5.15). Viceversa sia  $u_0$  una funzione che realizza un minimo per  $J(u)$ , che esiste per il teorema 3.1, tale che  $I(u_0) = J(u_0)$ . Allora

$$\inf_{\mathcal{D}} I(u) = \inf_{\mathcal{D}} J(u) = J(u_0) = I(u_0),$$

da cui si deduce che  $u_0$  realizza il minimo anche per  $I(u)$ .  $\square$

**Osservazione 5.3.** *La condizione (5.15) è presente in alcuni risultati di esistenza di minimi per funzionali non convessi, successivamente dimostrati (ad esempio E. Mascolo-R. Schianchi [17]).*

Sia  $u_0 = u_0(x)$  una curva che realizza il minimo di  $J(u)$  nella classe  $\mathcal{D}$ . Seguendo la definizione data da Tonelli, si dice che  $u_0$  è un *estremaloide* se  $u_0$  soddisfa per quasi ogni  $x \in (a, b)$  la seguente forma integrale dell'equazione di Euler-Lagrange:

$$G_z(x, u_0, u_0') - \int_0^x G_y(t, u_0, u_0') dt = \text{costante}. \quad (5.16)$$

Sia  $E_0$  il sottoinsieme di  $(a, b)$  costituito dagli  $x$  per cui vale l'uguaglianza

$$G_z(x, u_0(x), u_0'(x)) = f_z(x, u_0(x), P(x, u_0(x))).$$

È evidente che  $E_0 = \{x \in [a, b] : P(x, u_0(x)) \leq u_0'(x) \leq Q(x, u_0(x))\}$ .

Posto

$$\Omega(x, y) = \frac{f_x(x, y, Q) - Qf_y(x, y, P) + Pf_y(x, y, Q) - f_x(x, y, P)}{Q - P},$$

si prova che se  $u_0$  è un minimo per il funzionale rilassato  $J(u)$  si deve avere

$$\Omega(x, u_0(x)) = 0, \quad \text{per ogni } x \in E_0. \quad (5.17)$$

Data una curva  $u(x)$ , diremo che è *singolare* in  $[a', b']$  se sono verificate

$$\begin{aligned} \Omega(x, u(x)) &= 0, & a' &\leq x \leq b' \\ f(x, u(x), u'(x)) &> G(x, u(x), u'(x)), & a' &< x < b'. \end{aligned}$$

Il seguente teorema fornisce una condizione anche sufficiente per l'esistenza del minimo per il funzionale non convesso  $I$ .

**Teorema 5.4.** *Il problema di minimo per il funzionale non convesso  $I$  ammette almeno una soluzione se e solo se fra tutte le soluzioni del problema di minimo per il funzionale convesso  $J(u)$  (rilassato di  $I$ ) ne esiste una che non è singolare in nessun sottointervallo di  $[a, b]$ .*

*Dimostrazione.* La condizione è necessaria, infatti sia  $u_0$  una soluzione del problema di minimo per  $I(u)$  ma  $u_0$  è anche soluzione di minimo per  $J(u)$  segue

$$f(x, u_0(x), u_0'(x)) = G(x, u_0(x), u_0'(x)).$$

Proviamo che è anche una condizione sufficiente. Sia  $u_0$  una soluzione del problema di minimo per  $J(u)$  che non risulta singolare in nessun sottointervallo di  $[a, b]$ . Per la (5.17), se  $x \in E_0$  si ha che

$$f(x, u_0(x), u_0'(x)) = G(x, u_0(x), u_0'(x)).$$

Inoltre se  $x \notin E_0$  allora  $u_0'(x) \notin [P, Q]$  e quindi

$$f(x, u_0(x), u_0'(x)) = G(x, u_0(x), u_0'(x)) \Rightarrow I(u_0) = J(u_0)$$

ovvero  $u_0$  è minimo per  $I(u)$ .  $\square$

Si ottiene quindi che quando  $\Omega(x, y) \neq 0$  per ogni  $x$  e  $y$ , il problema non convesso ammette soluzione. Il risultato precedente è particolarmente interessante per i funzionali dipendenti esplicitamente da  $x$  e  $u$ .

Diamo due esempi in cui è possibile applicare il precedente risultato per ottenere l'esistenza o la non esistenza di minimi.

**ESEMPIO 1.** Dimostriamo che il problema di minimo per il seguente funzionale

$$\int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 + u^4 dx \quad (5.18)$$

nella classe  $D = \{u \in C^{0,1}(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$  non ha soluzioni.

Il funzionale in (5.18) è noto come controesempio di Bolza all'esistenza di minimi (per ulteriori approfondimenti si veda [7]).

Il grafico della funzione integranda è rappresentato in figura 3.

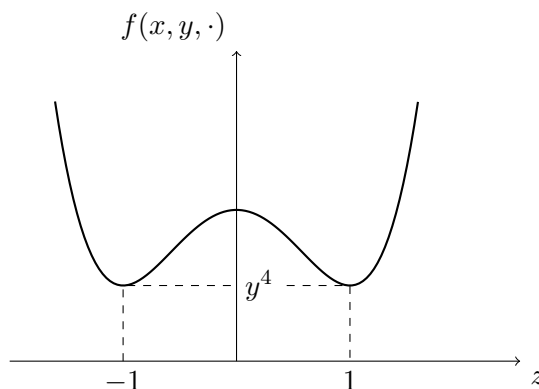


FIGURA 3. Grafico della funzione integranda nell'esempio di Bolza.

Come si può osservare dal grafico, per ogni  $x$  e  $y$  fissati, la funzione  $f(x, y, \cdot)$  risulta non convessa in un'unica componente connessa e in più, per ogni  $x$  e  $y$ , risulta

$$P(x, y) = -1 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = 1.$$

Dal momento che la funzione  $f$  non dipende dalla variabile  $x$  e che  $4y^3 = f_y(x, y, P) = f_y(x, y, Q)$ , si ha che per ogni  $x$  e  $y$  vale

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(-4y^3 - 4y^3) = -4y^3.$$

La funzione  $G$  definita in (5.8), in questo caso è data da

$$G(x, y, z) = \begin{cases} (z^2 - 1)^2 + y^4 & z \notin [-1, 1] \\ y^4 & z \in [-1, 1] \end{cases}$$

e il funzionale rilassato  $J$  è quindi

$$J(u) = \int_0^1 G(x, u(x), u'(x)) dx.$$

Si osservi che  $0 \leq \inf_D J(u) \leq J(0) = 0$  e dunque il minimo di  $J(u)$  vale 0. Inoltre è ovvio che la funzione  $u_0(x) \equiv 0$  è l'unica soluzione del problema. Per tale funzione per ogni  $x \in (0, 1)$  si ha  $\Omega(x, u_0(x)) = 0$  e  $f(x, u_0(x), u_0'(x)) > G(x, u_0(x), u_0'(x))$ , ovvero la curva  $u_0$  è singolare e il problema di minimo per  $I(u)$  non ha soluzione in virtù del teorema 5.4.

**ESEMPIO 2.** Siano  $h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni due volte derivabili e tali che la funzione

$$f(x, y, z) = h(z) + g(y)$$

verifichi le condizioni (5.1) e (5.6). Consideriamo il funzionale

$$I(u) = \int_a^b h(u'(x)) + g(u(x)) dx, \quad (5.19)$$

al variare di  $u \in C^{0,1}(a, b)$ .

Il risultato del teorema 5.4 fornisce una condizione sufficiente sulla funzione  $g$  affinché il problema di minimo per  $I$  abbia sempre soluzione.

Calcoliamo infatti la funzione  $\Omega$  in questo caso particolare. Si ha

$$\Omega(x, y) = \frac{-Qg'(y) + Pg'(y)}{Q - P} = -g'(y).$$

Ne segue che se la funzione  $g(y)$  è quasi ovunque strettamente monotona,  $\Omega(x, y) \neq 0$  per quasi ogni  $(x, y)$  e dunque il problema di minimo ha sempre soluzione.

## 6. VITA E OPERE DI N.N. BOGOLYUBOV: DAL CALCOLO DELLE VARIAZIONI ALLA BOMBA H

In questo paragrafo daremo qualche cenno sulla vita e le ricerche di N.N. Bogolyubov (21 Agosto 1909 -13 Febbraio 1992), uno dei più importanti matematici e fisici russi del '900.

In letteratura si possono trovare numerosi articoli e saggi, per la maggior parte scritti da suoi allievi, alcuni dei quali diventati scienziati di fama internazionale, ma probabilmente la biografia più particolareggiata è quella del fratello minore A.N. Bogolyubov ([2]).

Vale la pena anticipare che in tutti gli articoli che riguardano la sua vita e le sue opere, N.N. Bogolyubov viene presentato come una figura di altissimo livello non solo scientifico ma anche umano. Per esempio in [11] si afferma:

*Gli interessi di Nikolai Nikolaevich non erano limitati alla sola sfera della matematica ma aveva molti altri interessi, era in particolare un grande appassionato di Storia, Filosofia e Letteratura classica...*

*Ha avuto una grande influenza nello sviluppo della matematica e della fisica nell'Unione Sovietica mantenendo sempre una continua attenzione per i giovani ricercatori...*

*Tutti quelli che lo hanno conosciuto ricordano non solo il suo alto profilo scientifico ma anche il suo senso di responsabilità accompagnato da un'elegante gentilezza...*

Nicolas Nikolaevich Bogolyubov, il cui nome come accade spesso per i russi è traslitterato in più di una versione (Bogoljubov, Bogolyubov e Bogoliuboff) era nato a Novgorad il 21 agosto 1909 (8 agosto del calendario Giuliano a quel tempo ancora in vigore in Russia <sup>4</sup>).

Il padre di Bogolyubov era un sacerdote della chiesa ortodossa e in seguito alla rivoluzione di ottobre del 1917, per poter assicurare una buona istruzione al figlio, la famiglia si dovette trasferire a Kiev.

Alla sola età di 13 anni N.N. Bogolyubov cominciò a seguire i seminari dell'università di Kiev, tenuti da N.M. Krylov e nel 1924 (quando aveva solo 15 anni) scrisse il suo primo articolo scientifico "*On the behavior of solutions to linear differential equations at infinity*".

L'anno successivo, benché privo di una laurea, venne accettato per un posto di dottorato all'Accademia Ucraina delle Scienze di Kiev. Nel 1928 concluse il suo dottorato discutendo una tesi dal titolo "*Direct Methods of the Calculus of Variations to Investigation of Irregular Cases of a Simplest Problem*".

Il Calcolo delle Variazioni è stato quindi uno dei primi argomenti studiati da N.N. Bogolyubov nel suo primo periodo di ricerca scientifica, ma non l'unico, come si può apprendere in alcune sue biografie (si veda per esempio [15]).

Del periodo iniziale dell'attività scientifica di N.N. Bogolyubov non si hanno informazioni certe; è possibile che gli argomenti della tesi di dottorato abbiano condotto Bogolyubov alle ricerche di Tonelli sul Calcolo delle Variazioni. Sebbene non si riescano a trovare dettagli di un suo eventuale soggiorno a Bologna, sembra che in ogni caso vi sia stata collaborazione fra Tonelli ed il giovane matematico russo.

Nell'articolo N.N. Bogolyubov oltre al primo risultato di rilassamento che si conosce in letteratura e alle condizioni necessarie e sufficienti che abbiamo descritto nei precedenti paragrafi, fornisce anche un risultato di regolarità parziale. In (5.16) abbiamo già dato la nozione di estremaloide; si dice invece che una funzione  $u_0$  è un'estremale per  $f$  se

$$\frac{d}{dx} f_z(x, u_0, u'_0) = f_y(x, u_0, u'_0).$$

N.N. Bogolyubov dimostra che per il funzionale non convesso  $I$  esiste almeno un estremaloide nella classe  $D$  delle funzioni  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con estremi assegnati composto da un numero finito di archi estremali. Inoltre,

---

<sup>4</sup>Il passaggio al calendario Gregoriano avvenne dopo la rivoluzione del 1917.

fissato  $\varepsilon > 0$ , si può trovare nella classe  $D$  un estremaloide  $u_\varepsilon$  tale che

$$\inf_{u \in D} I(u) - I(u_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sebbene negli articoli non sia presente la bibliografia, è evidente, per la terminologia e gli strumenti utilizzati, il continuo riferimento al famoso trattato [21] di Tonelli.

Nel 1931 Bogolyubov, sempre sugli Annali di Matematica, pubblica un'altro articolo: “*Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*”, [4], ancora su problemi di minimo per funzionali non convessi, che gli permise di ottenere il titolo di Dottore in Matematica honoris causa attribuitogli dall'Accademia Ucraina delle Scienze.

Data una curva  $C$  con rappresentazione analitica  $x = x(s), y = y(s)$  e angolo di direzione  $\vartheta(s)$ , si definisce il funzionale

$$I(C) = \int_0^{L_C} f(x(s), y(s), \vartheta(s), \frac{d\vartheta}{ds}(s)) ds$$

dove  $L_C$  è la lunghezza della curva  $C$  e  $s$  rappresenta l'ascissa curvilinea. I risultati del secondo articolo sono ancora fortemente ispirati alle ricerche di Tonelli, Bogolyubov dimostra per questa classe di funzionali, alcuni risultati di non esistenza di minimo, un nuovo risultato di rilassamento, una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza ed infine un risultato di regolarità.

I risultati presentati sembrano interessanti, tuttavia non è chiara fino in fondo la loro portata, per la natura particolarmente tecnica delle dimostrazioni che rende la lettura estremamente complessa.

I due articoli rappresentano il contributo di N.N. Bogolyubov al Calcolo delle Variazioni e seppur scritti in giovane età, questi risultati mostrano la caratteristica che poi si è rivelata una costante del suo lavoro scientifico ovvero l'abilità nell'affrontare i problemi con metodi e tecniche completamente originali.

A questo proposito, A.A. Logunov e S.P. Novikov in [15] descrivono il suo stile scientifico in questo modo

*La caratteristica principale dello stile scientifico di Bogolyubov sta nella sua capacità di valutare il carattere fondamentale del problema e allo stesso tempo la sua risolubilità in linea di principio, senza soffermarsi nelle eventuali difficoltà, cercando se necessario un nuovo apparato teorico e tecnico adeguato a risolvere il problema.*

ed ancora in [18] Y.A. Mitropolskii e S.V. Tyablikov scrivono

*Bogolyubov è uno specialista nei problemi che non possono essere risolti con i metodi usuali ma richiedono un approccio completamente nuovo.*

L'articolo [3] ha 45 citazioni (dati da Google Scholar) ed è interessante notare come la maggior parte di queste siano di autori russi e a partire dal 2000.

In particolare in alcuni articoli di A.A. Tolstonogov, ([19], 2003 e [20], 2005), il procedimento di Bogolyubov, è utilizzato per studiare questioni relative ad inclusioni differenziali con dati non convessi ed inoltre nel 2004,

in collaborazione con F.S. De Blasi e G. Pianigiani ([8]), con lo stesso metodo sono stati studiati problemi con vincoli non convessi in spazi di Banach. In un articolo del 2011 M.A. Sychev [24] fa riferimento ai risultati di Bogolyubov, nell'ambito di alcune questioni di rilassamento.

Dal 1932 in poi, insieme al proprio maestro Krylov, cominciò a sviluppare una nuova branca della fisica matematica, la teoria delle oscillazioni non lineari, denominata *meccanica non lineare*.

Nel libro scritto con N.M. Krylov "*New methods of non-linear mechanics*" compare un risultato dovuto a Bogolyubov sulle funzioni quasi periodiche nel quale dimostra che ogni funzione quasi periodica può essere approssimata con un polinomio trigonometrico.

Questo teorema di approssimazione è uno dei teoremi fondamentali nella teoria delle funzioni quasi periodiche e la sua importanza è sottolineata da B.M. Levitan in [14]

*Dimostrando il teorema di approssimazione, Bogolyubov ha fornito una nuova indipendente costruzione della teoria delle funzioni quasi periodiche.*

Altri contributi in questo settore sono i metodi per studiare i processi oscillatori: il *Krylov-Bogolyubov averaging method* e il *Krylov-Bogolyubov-Mitropol'skii asymptotic method*.

L'importanza e la profondità dei risultati ottenuti in questo campo, sono sottolineati da A.A. Logunov, S.P. Novikov e V.S. Vladimirov in [15]

*Le idee e i risultati fondamentali di Bogolyubov nella meccanica non lineare sono la base delle moderne ricerche nella meccanica generale, meccanica di un mezzo continuo, meccanica celeste, meccanica di un corpo solido e sistemi giroscopici, la teoria di stabilità di movimento, la teoria del controllo, regolazione e stabilità, meccanica del volo spaziale, dell'ecologia matematica, e altre tendenze nelle scienze naturali e tecnologie.*

Durante la seconda guerra mondiale, dopo l'attacco tedesco culminato con il bombardamento di Kiev del 1941, molti istituti e università furono evacuati. Bogolyubov si recò a Ufa in Bashkortostan, dove rimase, come capo del Dipartimento di Analisi Matematica, fino all'agosto del 1943 quando si trasferì a Mosca.

A Mosca accettò un posto al Dipartimento di Fisica Teorica e concentrò i propri studi sulla teoria dei processi stocastici.

I risultati più importanti in questo argomento sono contenuti nella monografia *Problems of dynamical theory in statistical physics*. Per le sue ricerche in quest'ambito, nel 1948 Bogolyubov ottenne il Premio Stalin per la prima volta.

All'inizio del 1950 Bogolyubov fu inviato dal governo sovietico ad Arzamas-16 (centro per le ricerche nucleari russe) per partecipare alla creazione della prima bomba a idrogeno dell'URSS. Il suo compito era quello di fornire il supporto matematico necessario ad un gruppo di fisici teorici.

Anche in questo campo Bogolyubov si è dimostrato un ricercatore molto prolifico, portando a termine una serie di brillanti articoli sulla teoria della stabilità del plasma in un campo magnetico e sulla teoria e le applicazioni delle equazioni cinetiche.

Per il suo contributo alla creazione della prima bomba a idrogeno ricevette per la seconda volta il Premio Stalin nel 1953. Sempre negli anni '50, rivolse la propria attenzione anche alla fisica quantistica dei campi, ottenendo anche in questo campo risultati di grande importanza.

In particolare, nelle sue ricerche sulle relazioni di dispersione nella teoria dei campi quantici, Bogolyubov, incontra una serie di nuovi problemi di natura puramente matematica, legati alla teoria delle funzioni a più variabili complesse e alla fine degli anni cinquanta prova il teorema noto come *Edge of the Wedge Theorem*.

Diamo un'idea del risultato. Sia  $\Gamma$  un cono aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $V$  l'intersezione di  $\Gamma$  con una palla aperta centrata nell'origine (limitata). Sia  $E$  un insieme aperto e non vuoto di  $\mathbb{R}^n$  e definiamo

$$W^+ = E + iV, \quad W^- = E - iV.$$

Con riferimento al nome del teorema,  $W^+$  e  $W^-$  sono i due 'wedge' e  $E$  è il loro comune 'edge'.

**Teorema 6.1.** *Con  $E$ ,  $W^+$  e  $W^-$  come sopra, esiste un aperto  $\Omega$  in  $\mathbb{C}^n$  che contiene  $W^+ \cup E \cup W^-$  e che ha la seguente proprietà: ogni funzione complessa  $f$  continua su  $W^+ \cup E \cup W^-$  che è olomorfa in  $W^+ \cup W^-$  si estende ad una funzione olomorfa  $F$  in  $\Omega$ .*

Il teorema in una dimensione, provato nel 1888 da P. Painlevé, afferma che una funzione complessa olomorfa nel semipiano inferiore e in quello superiore è una funzione analitica. Le applicazioni ad altri ambiti sono numerose, come si può leggere in [23] dove V.S. Vladimirov, V.V. Zharinov e V.V. Sergeev scrivono

*Il teorema "edge of the wedge", che è stato scoperto e dimostrato da Nikolai Nikolaevich Bogolyubov per la soluzione del problema concreto nel campo della fisica come giustificazione delle relazioni di dispersione nella teoria quantistica dei campi, ha trovato numerose applicazioni in fisica teorica, in fisica matematica ed in matematica, creando nuove linee di ricerca nella moderna analisi complessa in più variabili.*

Oltre ad essere stato un eccellente ricercatore, autore di più di 400 articoli e 20 monografie, Bogolyubov si è dimostrato anche un ottimo insegnante. Molti dei suoi allievi infatti sono diventati scienziati famosi nel proprio ambito di ricerca, infatti in [11] gli autori scrivono

*Bogolyubov ha cresciuto un'intera generazione di matematici e fisici teorici. Molti scienziati famosi con rispetto e orgoglio lo chiamano Maestro. Il forte legame fra matematica e fisica costringe tutti coloro che studiano le sue opere a ricordare quei momenti in cui i rappresentanti delle scienze esatte erano semplicemente chiamati "filosofi naturali".*

N.N. Bogolyubov è stato dunque un matematico e fisico di straordinario livello, capace di lasciare il segno in ogni ambito in cui si sia cimentato. La sua attività ha sempre interagito in modo efficace con ogni ramo della ricerca scientifica, con grande capacità di analisi di diversi problemi e seguendo l'obiettivo di rappresentare in modo unitario tutti gli aspetti della matematica pura ed applicata.



L'originalità delle sue ricerche risiede anche nell'aver compreso la necessità di individuare strumenti matematici da utilizzare nei più vari campi del sapere e dell'operare. Nella sua esperienza scientifica è evidente il tentativo, comune anche ad altri scienziati del XIX secolo, di racchiudere in una visione unitaria la scienza pura e quella applicata. Tuttavia quando la scienza viene utilizzata dal mondo della produzione, e anche al servizio di attività militari, possono sorgere non poche contraddizioni. Bogolyubov, sebbene avesse partecipato all'ideazione della bomba H, era un convinto sostenitore della pace e dei possibili studi alternativi dell'energia atomica, ad esempio nel campo medico.

In questa breve nota abbiamo presentato la figura N.N. Bogolyubov ricostruendo solo la parte iniziale della sua vastissima opera, relativa allo studio dei problemi non convessi del Calcolo delle Variazioni. Per concludere non possiamo non chiederci quali e quanti contributi fondamentali sarebbe stato in grado di dare se la sua attività scientifica fosse proseguita in quest'ambito.

*Le autrici ringraziano i referee per gli utili commenti e suggerimenti.*

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] BALL J. M., *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 63, 1977, 337-403.
- [2] BOGOLYUBOV A. N. *N.N. Bogolyubov. Life and Work*, Dubna, 1996
- [3] BOGOLYUBOV N. N., *Sur quelques méthodes nouvelles dans le Calcul des Variations*, Ann. Mat. Pura e Applicata, 4, Ann. Mat. Pura Appl. 7 (1929), no. 1, 249271.
- [4] BOGOLYUBOV N. N., *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*, Ann. Mat. Pura Appl. 9 (1931), no. 1, 195241,
- [5] BUTTAZZO G., *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variation*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, 1989
- [6] DAL MASO G., *Problemi di Semicontinuità e Rilassamento nel Calcolo delle Variazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana 39, Pitagora Editrice, Bologna, 1995
- [7] DARACOGNA B., *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2009
- [8] DE BLASI, F. S., PIANIGIANI G. e TOLSTONOGOV, A. A. *A Bogolyubov-type theorem with a nonconvex constraint in Banach spaces*, SIAM J. Control Optim. 43 (2004), no. 2, 466476
- [9] EKELAND, I.; TEMAM, R., *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Collection études Mathématiques. Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.
- [10] ERICKSEN J., *Equilibrium of bars*, Journal of elasticity, 5, 1975
- [11] FADDEEV L. D. e GONCHAR A. A. e MASLOV V.P. e MITROPOL'SKII YU.A. e NOVIKOV S.P. e SINAI YA.G. e VLADIMIROV V. S. e ZHIZHCHENKO A. B., *Nikolai Nikolaevich Bogolyubov (obituary)*, Russian Math. Surveys, 47, 1992
- [12] GIUSTI E., *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni*, Unione Matematica Italiana, 1994
- [13] IOFFE, A. D.; TIHOMIROV, V. M., *Theory of extremal problems* Translated from the Russian by Karol Makowski. Studies in Mathematics and its Applications, 6. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
- [14] LEVITAN B. M., *On the work of Nikolai Nikolaevich Bogolyubov in the theory of almost periodic functions*, Russian Math. Surveys, 49, 1994
- [15] LOGUNOV A. A. e NOVIKOV S.P. e VLADIMIROV V.S., *Nikolai Nikolaevich Bogolyubov (On his 80th birthday)*, Russian Math. Surveys, 44, 1989
- [16] MARCELLINI P., *Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità*, Rendiconti di Matematica, 2, 1980

- [17] MASCOLO E., SCHIANCHI R., *Existence theorems for non convex problems*, Journal de Mathematique Pure et Appl., 62, (1982), 349-359.
- [18] MITROPOLSKII YU.A. e TYABLIKOV S.V., *Nikolai Nikolaevich Bogolyubov (on the occasion of his fiftieth birthday)*, Soviet Physics Uspekhi, 69, 1959
- [19] TOLSTONOGOV, A. A. *A theorem of Bogolyubov with constraints generated by a second-order evolutionary control system*, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 67 (2003), no. 5, 177–206; translation in Izv. Math. 67 (2003), no. 5, 10311060
- [20] TOLSTONOGOV, A. A. *Bogolyubov's theorem under constraints generated by a lower semicontinuous differential inclusion*, (Russian) Mat. Sb. 196 (2005), no. 2, 117–138; translation in Sb. Math. 196 (2005), no. 1-2, 263285
- [21] TONELLI, L., *Fondamenti del Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli, Vol.1, 1921 e Vol. 2, 1923.
- [22] VLADIMIROV V. S. *N.N. Bogolyubov and mathematics*, Russian Math. Surveys, 56, 2001
- [23] VLADIMIROV V .S. e ZHARINOV V.V. e SERGEEV V.V., *Bogolyubov's edge of the wedge theorem, its development and applications*, Russian Math. Surveys, 49, 1994
- [24] SYCHEV M. A. *Lower semicontinuity and relaxation for integral functionals with  $p(x)$ - and  $p(x, u)$ -growth*, Siberian Math. Journal, Volume 52, Number 6 (2011), 1108-1123

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "U. DINI", UNIVERSITÀ DI FIRENZE, VIALE MORGAGNI 67/A, 50134 - FIRENZE, ITALY