Appunti Lezione di Matematica con elementi di Statistica per la Biologia a.a. 2019-20 (Prof. Elvira Mascolo)

lezioni 6, 9, 13 Marzo 2020

Introduzione al concetto di derivata: $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"rapidità" con cui i valori di $f(x)$ variano rispetto a x:

Tasso di variazione: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\text{incremento di } f}{\text{incremento di } x}$, $h \in \mathbb{R}$

Esempi: la variabile è il tempo:

- $N(t)$ = numero individui all'istante t_0: $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{N(t_0+h)-N(t_0)}{h}$
- $M(t)$ = massa che varia per una reazione chimica $\dfrac{\Delta M(t)}{\Delta t}$
- punto materiale che si muove: $t \to s(t)$: $\dfrac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$

Si tratta del tasso di variazione media, nel terzo caso velocità media

Il processo di limite fa passare ad un valore istantaneo

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = v(t_0) = \dot{s}(t_0)$$ velocità del punto

Definizione. Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$

$$F(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Rapporto incrementale di f in x_0

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

derivata prima di f in x_0

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ allora f si dice "derivabile" in x_0.

Esempi

- $f(x) = \text{costante} = c$ (non c'è variazione)

$$F(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

- $f(x) = x$

$$F(h) = \frac{x+h-x}{h} = 1 \Rightarrow \lim_{h\to 0} F(h) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

- $f(x) = x^2$

$$F(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \Rightarrow \lim_{h\to 0} F(h) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x$$

- $f(x) = e^x$

$$F(h) = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \left[\frac{e^h - 1}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} F(h) = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \quad \left[\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\right]$$

limite notevole

- $f(x) = a^x$ stesso procedimento ma

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \underbrace{\boxed{\frac{a^h - 1}{h}}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} \log a} = a^x \log a$$

- $f(x) = \log x$

$$F(h) = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} =$$

per le propr. del logaritmo ($\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$)

$$= \frac{1}{h}\left[\log\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = 1 \quad \left(\text{limite notevole } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\right]$$

- $f(x) = \log_a x$ (stesso procedimento) $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x \log a}$

- $f(x) = \operatorname{sen} x$

Ricordiamo che: $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$F(h) = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{h} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos x. \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

(limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$)

- $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x.$

- $f(x) = \sqrt{x}$

$$F(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{x + h - x}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{solo per } \boxed{x \neq 0} \leftarrow \text{Attenzione}$$

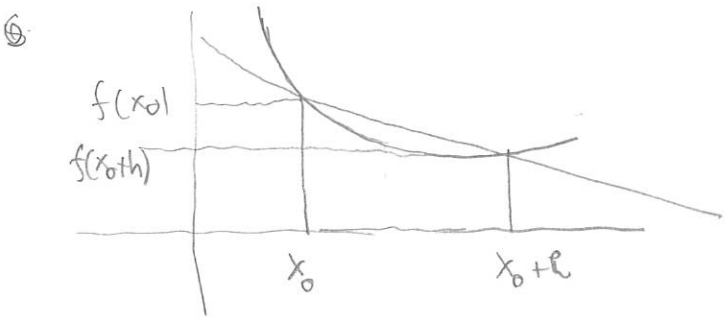
Studiamo il rapporto incrementale per $x = 0$

$$F(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

La funzione radice è derivabile per $x \neq 0$ e $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ma $\boxed{\text{non}}$ è derivabile in $x = 0$ $\quad f'(x) = +\infty$

Interpretazione geometrica della derivata



Equazione della retta che passa per i punti del piano $(x_0, f(x_0))$ $(x_0+h, f(x_0+h))$

$$\frac{y-f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{x-x_0}{h} \Rightarrow y_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0)$$

per $h \to 0$

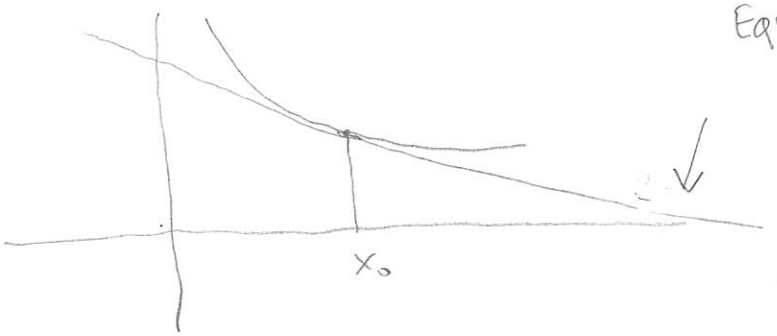
$$\lim_{h\to 0} y_h = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}(x-x_0)+f(x_0) \xrightarrow{h\to 0} \boxed{f'(x_0) \in \mathbb{R}}$$

se f è derivabile

si ottiene la retta

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$



Equazione retta tangente:

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Teorema: se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow$ f è continua in x_0

DIM. Ricordiamo che f è continua in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{oppure in modo equivalente} \quad \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Allora

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \qquad h \neq 0$$

quindi

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h =$$

$$= \boxed{f'(x_0)} \cdot 0 = 0$$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$ dal momento che f è derivabile in x_0.

Se f è derivabile in x_0 il suo grafico ha la tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si vede che se h è abbastanza piccolo il valore $f(x_0+h)$ è approssimato dal valore della tangente per $x = x_0 + h$:

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\, h \qquad (h = x - x_0)$$

$f(x) = e^x$ retta tangente al grafico in $x_0 = 0$ $\quad (f'(x) = e^x)$

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = e^0 + e^0 x = 1 + x:$$

nei punti x vicino a 0: $\boxed{e^x \simeq 1 + x}$

Valore approssimato di $\sqrt{16,12}$.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad x \neq 0$

$x_0 = 16$ $\qquad x_0 + h = 16 + 0,12$ $\qquad h = 0,12$.

Retta tangente: $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) =$

$= \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,12 = 4 + \frac{1}{8} 0,12$

$\simeq 4 + 0,015$ (valore appro.)

Una funzione continua non è sempre derivabile.

$f(x) = |x|$

f continua in $x_0 = 0$

$F(h) = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$ non esiste il limite per $h \to 0$, <u>non è derivabile</u>

esistono il limite a destra ed a sinistra:

$$\lim_{h \to 0^+} F(h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} F(h) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-h)}{h} = -1$$

In generale: $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R} \quad x_0 \in [a,b]$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_d(x_0)$$ derivata destra di f in x_0

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_s(x_0)$$ derivata sinistra di f in x_0

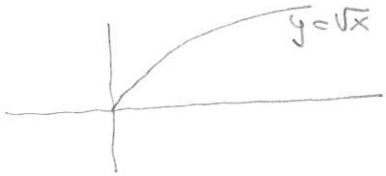
f derivabile in x_0 se $\quad f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

$f(x) = |x| \qquad f_s(0) = -1 \qquad f_d(0) = +1$

Se f ha in x_0 $f'_s(x_0)$ e $f'_d(x_0)$ diverse ma finite ($f'_s(x_0), f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$)

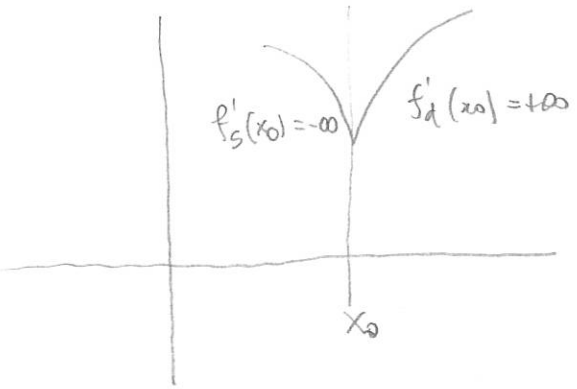
$x = x_0$ punto angoloso per il grafico di f

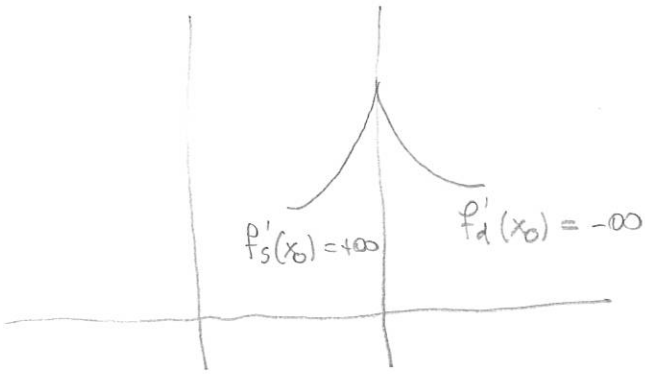
Se $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$ $\boxed{x_0 \text{ CUSPIDE}}$ per il grafico di f

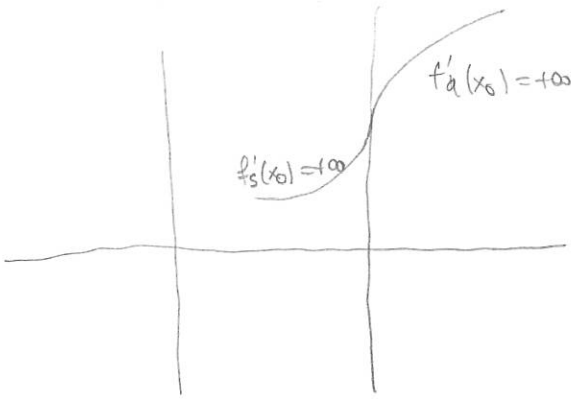


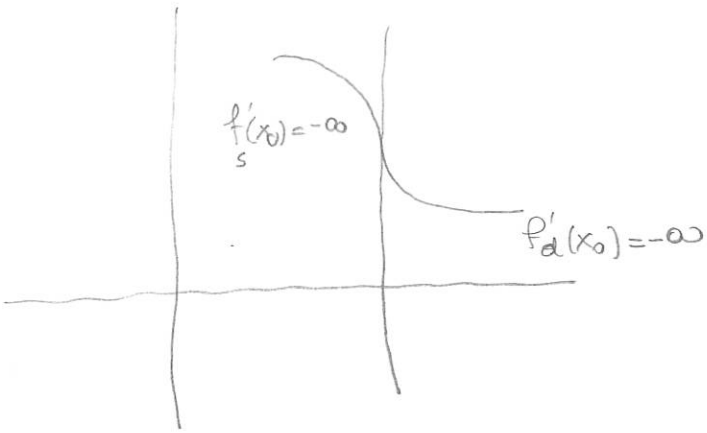
$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 0$ $\quad f'_d(0) = +\infty$

l'asse delle y è la tangente verticale al grafico di $\sqrt{x}$.









Operazioni con le derivate

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, supponiamo che f e g siano derivabili in x_0

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{(polinomi)}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \quad \text{(potenze)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{(funzioni razionali)}$$

In particolare

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Esempi

$$D(x^2) = D(x \cdot x) = x + x = 2x$$

$$D(x^3) = D(x \cdot x^2) = x^2 + x\, 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

Si generalizza:

$$D(x^n) = n\, x^{n-1}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$D(x^2 \operatorname{sen} x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$$

$$D(x^3 \cos x) = 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$$

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{D \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\, D \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Derivata funzioni composte

$h: x \in [a,b] \to f(x) \to g(f(x))$

$h(x) = g(f(x))$

$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ (Regola della catena)

- $x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} \operatorname{sen}(x^2)$ $\quad \begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(y) = \cos y \end{cases}$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

- $x \xrightarrow{f} \operatorname{sen} x \xrightarrow{g} e^{\operatorname{sen} x}$ $\quad \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ g'(y) = e^y \end{cases}$

$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$

- $x \xrightarrow{f} \operatorname{sen} x \xrightarrow{g} (\operatorname{sen} x)^2$ $\quad \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ g'(y) = 2y \end{cases}$

$h'(x) = g'(\operatorname{sen} x) \cdot f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Derivata funzione inversa

$f: [a,b] \to [c,d]$ $\quad f'(x_0) \neq 0$

$f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ $\quad y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ (legame tra y_0 e x_0 : $f(x_0) = y_0$)

$$D \operatorname{arctg} y_0 = \frac{1}{D(\operatorname{tg}(x_0))}_{x_0 = \operatorname{arctg} y_0} = \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0}\right]_{x_0 = \operatorname{arctg} y_0} =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y_0)} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$ $(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0)$

DERIVATE FUNZIONI ELEMENTARI

$D(\text{cost}) = 0$

$D(x) = 1$

$D(x^n) = n x^{n-1}$

$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $D x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$D x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1-1/n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$D \operatorname{sen} x = \cos x$

$D \cos x = -\operatorname{sen} x$

$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$D a^x = a^x \log a \qquad D e^x = e^x$

$D \log_a x = \frac{1}{x \log a} \qquad D \log x = \frac{1}{x}$

Esempi

$D(3x^3 + \operatorname{arctg}^3 x) = 9x^2 + 3\operatorname{arctg}^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$$D\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{x-\cos x}\right) = \frac{-\cos x(x-\cos x) - (1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{(x-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-x\cos x + \cancel{\cos^2 x} \cancel{-1} + \cancel{\operatorname{sen}^2 x}}{(x-\cos x)^2} = \frac{-x\cos x}{(x-\cos x)^2}$$

ESERCIZI : Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$

$f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

$f(x) = \operatorname{sen}(\log_2(\cos x))$

$f(x) = 2^{\operatorname{sen}^5(\log x)}$

$f(x) = \cos(\operatorname{sen}(\log 2x))$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\log 2x)) \cdot \cos(\log(2x)) \dfrac{1}{2x} \cdot 2$

$f(x) = e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 5x)$

$f(x) = \log(\log x)$

Determinare la retta tangente:

- $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x + 1 \qquad x_0 = 0$

  $f(0) = 1$

  $f'(x) = 2 + \cos x$

  $f'(0) = 2$

  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  $y = 1 + 2x$

- $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ in $x_0 = \frac{\pi}{6}$
- $f(x) = x \log x$ in $x_0 = e$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$ in $x_0 = 1$
- $f(x) = x^7 \operatorname{sen} x - 7(x-\pi)^2$ in $x_0 = \pi$
- $f(x) = e^x + (e^x + 7)\operatorname{arctg} x$ in $x_0 = 1$
- $f(x) = e^{-2x}\sqrt{x-1}$ in $x_0 = 2$.