

Elvira Mascolo
Dipartimento DIMAI "U. Dini", Università di
Firenze

Equazioni differenziali e
Modelli matematici applicati alla
biologia

Appunti per il corso di MATEMATICA, cdl in
Scienze Biologiche

Introduzione

Lo studio della dinamica delle popolazioni biologiche tramite modelli matematici si potrebbe far risalire agli studi di Fibonacci ma i primi veri tentativi di applicazione di metodi matematici questioni di tipo biologico si sono avuti nel Seicento, quando si cominciarono a fare le tavole di mortalità e si tentarono alcune considerazioni di tipo statistico. Tuttavia si può dire che la prima volta che si usarono metodi matematici al campo biologico fu nel Settecento in relazione al vaccino del vaiolo. Vi furono i sostenitori favorevoli all'inoculazione del serio, nonostante provocasse una forma leggera della malattia e i contrari per i quali il vaccino era un'azione contro la natura. Nel 1760 il matematico svizzero D. Bernoulli cercò con considerazioni probabilistiche di determinare i vantaggi della vaccinazione, in termini di vite salvate. Contrari alla tesi di Bernoulli furono D'Alambert che dedicò varie memorie all'argomento, sostenendo che la scienza della vita era costituita da troppe variabili ed il matematico e fisico Jean-Baptiste Biot che giudicò irrealistiche le ipotesi semplificative di Bernoulli. Va notato che alcune di quelle ipotesi costituiscono ancora oggi la base di alcuni modelli relativi a questioni biologiche.

Il vero sviluppo della matematica a problemi della biologica, con l'introduzione di modelli di tipo **deterministico** si deve a Thomas Malthus (1766-1834) prima ed al matematico-biologo olandese Pierre Francoise Verhulst (1804-1849).

Malthus, partendo da considerazioni di tipo economico-sociale, si dedicò allo studio della dinamica e dell'evoluzione delle popolazioni che è ancora oggi uno dei campi di applicazione più fecondi della matematica alla biologia. Le sue ricerche lo portarono ad un liberismo radicale e sfrenato, secondo cui ogni individuo è e deve essere libero e privo di assistenza sociale e solidarietà, in modo tale che a prevalere siano i più forti. Tuttavia, la lettura delle sue opere influenzò molto Charles Darwin (1809-1882) nell'elaborazione della teoria della selezione naturale. Nel modello stabilito da Malthus nel 1798, che vedremo nei dettagli più avanti, la popolazione cresce in modo esponenziale mentre le risorse alimentari crescono secondo una progressione aritmetica e quindi in modo lineare. Il modello di Malthus fu corretto da Verhulst nel 1837 ed è noto come **modello logistico**.

Il grande sviluppo dei modelli matematici applicati alla scienza della vita è avvenuto nel secolo scorso intorno al 1920, ad opera del grande matematico italiano, Vito Volterra (1860-1940) che pose le basi dell'ecologia teorica, dimostrando i cicli di tipo *preda predatore* ed il cosiddetto **principio dell'esclusione competitiva**. Contemporaneamente, a conclusioni simili, arrivò Alfred Lotka (1880-1949) supervisore di compagnia di assicurazioni che coltivava numerosi interessi scientifici.

A partire quindi dall'inizio del Novecento la matematizzazione di alcuni fenomeni biologici come la dinamica delle popolazioni e l'evoluzione delle malattie ha subito un notevole sviluppo. Nell'ambito dell'Ecologia, l'Etologia e degli eco-sistemi gli studi sperimentali hanno ampiamente dimostrato l'esistenza di correlazioni e interazione tra le specie e di un equilibrio, non statico ma dinamico, che si altera facilmente in funzione di agenti esterni o interni alla specie stessa. L'applicazione di strumenti matematici a questo tipo di problemi, ha svolto un ruolo importante nello sviluppo di queste tesi e nella loro completa comprensione, fornendo modelli, che negli anni sono stati modificati e generalizzati sulla base delle nuove conoscenze biologiche.

Intorno agli anni '70 si è venuta quindi a creare una nuova disciplina la **biomatematica**, che studia le applicazioni dello strumento matematico a problemi biologici attraverso la costruzione, l'analisi e l'utilizzo di modelli matematici.

In quest'ambito l'obiettivo di un modello matematico può essere differente, in alcuni casi serve a interpretare in modo qualitativo il fenomeno che si osserva, in altri quando la struttura del sistema biologico è ben delineata ed i dati sufficientemente precisi ha lo scopo di prevedere l'andamento quantitativo del fenomeno ed infine vi sono modelli predittivi, che cercano di risolvere i problemi che possono intervenire.

I modelli matematici di tipo **descrittivo**, cercano di sintetizzare le informazioni disponibili su un determinato processo, senza cercare di spiegare il meccanismo su cui il processo è basato.

Un modello **interpretativo** formula alcune ipotesi circa il processo che si sta studiando e fornisce le conseguenze logiche.

Infine i modelli di tipo **predittivo** tentano di conoscere la risposta del sistema i cui effetti non possono essere osservati direttamente. Ad esempio vi sono modelli matematici che possono stimare gli effetti dell'inquinamento prodotto dalla costruzione di una fabbrica sull'ecosistema circostante. Una volta determinato il modello matematico che regola un fenomeno di natura biologica, è necessario attraverso una fase sperimentale stabilire quanto il modello sia significativo.

La matematica ha quindi grandi ed interessanti potenzialità di applicazione, ma spesso il problema in esame può essere estremamente complesso ed è quindi necessario semplificarlo notevolmente per ottenere modelli su cui sia possibile applicare con successo gli strumenti matematici. In questo processo di semplificazione è necessario individuare, fra gli aspetti del problema quelli essenziali che caratterizzano il fenomeno, senza i quali il modello potrebbe risultare non aderente alla realtà.

I modelli matematici sono suddivisi in **deterministici**, dove non interviene il caso e **stocastici** nei quali si tiene conto del fatto che alcuni meccanismi di evoluzione possono influenzati da variazioni casuali ed in questi ultimi intervengono in modo consistente gli strumenti e gli argomenti della Teoria della Probabilità.

Ci interesseremo di alcuni modelli matematici di tipo continuo, relativi alla dinamica di una popolazione e alla diffusione delle malattie.

Ne seguito per popolazione intendremo un insieme di elementi di varia natura, detti individui, il cui numero può cambiare in funzione del tempo per effetto dell'ambiente e delle sue caratteristiche.

Le principali questioni di interesse riguardano come una popolazione è strutturata in termini di età e grandezza e come tale struttura si modifica nel tempo, ed eventualmente nello spazio, per fattori interni o esterni.

In particolare, ci interessiamo solo modelli di tipo deterministico a dinamica continua per i quali l'accrescimento di una popolazione è basato sull'ipotesi che, una volta specificato il suo stato ad un istante iniziale fissato, il suo sviluppo futuro possa essere previsto in modo esatto nel senso che non sono tenute in conto i cambiamenti di tipo casuale e si suppone che ogni evento, come ad esempio nascita o morte di un organismo, avviene con certezza.

I modelli stocastici, che tengono in conto della probabilità di riproduzione o di morte degli organismi durante un certo periodo di tempo, sono più ricchi e realistici, ma presentano maggiori difficoltà di studio.

Popolazioni isolate: modelli lineari

Consideriamo una popolazione animale o vegetale ed indichiamo con $N(t)$ il numero dei individui. Questo numero dipende dal tempo ed a rigor di logica assume solo valori interi, tuttavia assumiamo che possa essere approssimata da una funzione continua e derivabile.

Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti. In questo caso il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e si ha che

$$N(t+h) - N(t) = \lambda N(t)h,$$

dividendo ambo i membri per h e passando al limite per $h \rightarrow +\infty$ si ha la relazione

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t). \quad (1)$$

Le funzioni che soddisfano (1) sono della forma

$$N(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Per assegnare un valore alla costante C basta conoscere il valore di $N(t)$ ad esempio all'istante iniziale $t = 0$, infatti denotato con $N_0 = N(0)$ si ha che $N_0 = C$ e quindi

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}. \quad (2)$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione (1) compare in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

Consideriamo ad esempio il caso della crescita di una cellula, ed sia $p(t)$ il peso di una cellula in funzione del tempo t . Supponendo che la crescita non sia influenzata da fattori esterni, è ragionevole pensare che in un piccolo intervallo di tempo, l'accrescimento della cellula sia proporzionale al tempo trascorso ad al peso della cellula all'istante t . Siano t e $t + h$ due istanti successivi, esiste quindi una costante k tale che

$$p(t + h) - p(t) = khp(t).$$

La relazione è più precisa quanto più h è piccolo, dividendo ambo i membri per h e passando al limite per h che tende a zero, si ottiene

$$\dot{p} = kp(t),$$

e conoscendo il valore di $p(t)$ all'istante iniziale $t = 0$, la soluzione è data da

$$p(t) = p(0)e^{kt}.$$

Osserviamo che sono regolati dall'equazione $\dot{y} = ky$ alcuni altri fenomeni come il processo della disgregazione radioattiva, quello relativo alla reazione di un tessuto vivente esposto a radiazioni ionizzanti, ed infine la reazione chimica di alcune sostanze.

Modello di Malthus

Passiamo ora al modello di crescita, stabilito da **Malthus**, relativo all'evoluzione di una popolazione isolata ed omogenea, in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse.

Sia $N(t)$ il numero di individui all'istante t e supponiamo che i fattori di evoluzione siano dati dal tasso di natalità λ ed dal tasso di mortalità μ , cioè il numero di nati e di morti rispettivamente nell'unità di tempo, nell'intervallo di tempo $[t, t + h]$ si hanno $\lambda h N(t)$ nuovi nati e $\mu h N(t)$ morti.

In un intervallo di ampiezza h la variazione media dell'accrescimento tiene conto sia del numero dei morti μ e del numero dei nati λ nell'unità di tempo:

$$\delta N = N(t+h) - N(t) = \lambda h N(t) - \mu h N(t),$$

e $\delta N(t)$ può essere positivo o negativo a seconda che prevalgono gli eventi di nascita o di morte.

Dividendo ambo i membri per h e passando al limite per h che tende a 0:

$$\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N(t). \quad (3)$$

Se $N_0 = N(0)$ è l'ampiezza della popolazione all'istante $t = 0$, la soluzione è data da

$$N(t) = N_0 \exp((\lambda - \mu)t). \quad (4)$$

Quando il tasso di natalità prevale, $\lambda > \mu$ allora la popolazione aumenta in modo esponenziale, se $\lambda < \mu$ diminuisce e con il tempo si estiguerà. Quando $\lambda = \mu$ si ha che la popolazione rimane stabile nel tempo.

Nel modello che abbiamo la popolazione cresce o decresce con il tempo in modo esponenziale. Tuttavia nessun organismo e nessuna popolazione cresce indefinitamente, infatti ci sono dei limiti ovvi posti dalla scarsità di cibo o di alloggio o da cause fisiche e oggettive.

Thomas Robert Malthus (1766-1834), era un economista e politico inglese. Nel suo saggio del 1798 *A essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society*, si teorizza l'uamento esponenziali della della popolazione umana e quello solo lineare delle risorse alimentari, con conseguente carestia. Oggi vengono chiamate malthusiane le teorie che indicano nella crescita demografica la causa principale della miseria. Tuttavia in qualche modo l'opera di Malthus ebbe grande influenza sulla teoria di Charles Robert Darwin (1809-1882) della selezione naturale.

Equazioni Differenziali Lineari

I due modelli matematici, che abbiamo illustrato, si basano dunque sulla determinazione della funzione $u = u(t)$ che soddisfa la seguente **Equazione Differenziale Ordinaria del primo ordine lineare**:

$$\dot{y}(t) = Ky(t), \quad (5)$$

e che piú in generale puó avere la forma

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad (6)$$

dove $a(t), b(t)$ sono funzioni continue definite in un intervallo $[a, b]$.

Per equazione differenziale si intende un tipo speciale di equazione in cui l'incognita è **una funzione**.

Il problema consiste nel determinare una funzione $u = u(t)$ definita in $[a, b]$ ed a valori reali tale che per ogni $t \in [a, b]$

$$\dot{u}(t) = a(t)u(t) + b(t). \quad (7)$$

La funzione $u = u(t)$ che soddisfa (7) si dice una soluzione dell'equazione differenziale ed il suo grafico si chiama **curva integrale**.

Il primo esempio che compare in analisi matematica è quello di primitiva.

Data una funzione continua f , consideriamo la seguente equazione differenziale

$$\dot{y}(t) = f(t).$$

Una soluzione è una funzione $u = u(t)$ tale che la sua derivata coincide con f , quindi una primitiva di f . È noto che tutte le primitive di f differiscono per una costante, quindi l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione è dato da $u + C$, con u primitiva di f e C costante reale.

Tenendo presente il caso della primitiva, si può intuire che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine costituisce una famiglia di funzioni al variare di un parametro costante.

Per le equazioni differenziali di tipo (6) vale il seguente teorema che stabilisce una formula risolutiva.

TEOREMA 1. Assegnata l'equazione differenziale:

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue definite in un intervallo $[a, b]$, tutte le sue soluzioni u hanno la forma

$$u(t) = e^{A(t)} \left(\int e^{-A(t)} b(t) dt + C \right), \quad (8)$$

dove A è una primitiva di a e cioè $\dot{A}(t) = a(t)$ e C è una costante reale.

► DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $e^{-A(t)}$

$$e^{-A(t)}\dot{y}(t) = e^{-A(t)}(a(t)y(t) + b(t)), \quad (9)$$

Osserviamo che

$$\frac{d(e^{-A(t)}y(t))}{dt} = e^{-A(t)}\dot{y}(t) - e^{-A(t)}a(t)y(t)$$

quindi da (9) si ha:

$$\frac{d(e^{-A(t)}y(t))}{dt} = e^{-A(t)}b(t),$$

Integrando si ottiene

$$e^{-A(t)}y(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt + C.$$

da cui segue la relazione (8) ◀

Le equazioni differenziali del tipo (6) hanno la proprietà **deterministica**, che risiede nel fatto che la soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine esiste ed è univocamente determinata, una volta assegnato il suo valore in un punto assegnato t_0 .

Questa importantissima proprietà è stabilita nel seguente **Teorema di esistenza ed unicità di Cauchy**.

TEOREMA 2. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ ed $t_0 \in [a, b]$, esiste ed è unica la soluzione dell'equazione

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

tale che $y(t_0) = y_0$

► DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, significa determinare le soluzioni $u = u(t)$, definite nell'intervallo $[a, b]$ tali che $u(t_0) = y_0$. Sia \tilde{A} la primitiva di a tale che $\tilde{A}(t_0) = 0$ e quindi

$$\tilde{A}(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds,$$

allora dal momento che

$$u(t) = e^{\tilde{A}(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{-\tilde{A}(s)}b(s) ds + C \right), \quad (10)$$

si ha $u(t_0) = e^{\tilde{A}(t_0)}C = C$ per la condizione imposta su \tilde{A} . Basta quindi scegliere $C = y_0$ e di conseguenza la soluzione è univocamente determinata.

◀

Assegnato (t_0, y_0) , il problema di determinare le soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine tali che $u(t_0) = y_0$ viene chiamato **Problema di Cauchy di punto iniziale** (t_0, y_0) .

Osserviamo che quando vale il teorema di esistenza ed unicità si ha che due curve integrali di una stessa equazione, non possono intersecarsi.

Sviluppo Storico delle Equazioni Differenziali

Diamo un'idea dello sviluppo storico della risoluzione di un'equazione differenziale del primo ordine che, in generale, ha la forma :

$$\dot{y} = f(t, y)$$

dove $f = f(t, y)$ è una funzione delle due variabili reali (t, y) .

Lo studio della sua risoluzione inizia con la ricerca dell'espressione esplicita delle soluzioni cioè delle funzioni $u = u(t)$ definite e dotate di derivata prima nell'intervallo $[a, b]$ tali che:

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b]$$

Successivamente nasce un nuovo modo di affrontare il problema: stabilire dapprima l'esistenza delle soluzioni e l'eventuale unicità e solo in un secondo momento affrontare la questione di determinare i procedimenti e le tecniche per ottenere la forma esplicita.

Grazie soprattutto ai contributi di Cauchy (1789-1857), questo nuovo approccio si va lentamente affermando, attraverso il cosiddetto studio *locale* delle soluzioni. Nelle sue lezioni all'Ecole Polytechnique Cauchy aveva infatti stabilito un risultato di esistenza ed unicità per le soluzioni intorno al punto iniziale. Nel 1876, all'oscuro dei risultati di Cauchy, Lipschitz (1823-1903) aveva ottenuto un analogo teorema di esistenza ed unicità, assumendo in luogo della continuità della derivata di f , richiesta da Cauchy, l'ipotesi più debole, nota oggi con il nome di *condizione di Lipschitz*:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

Nel 1888 Peano (1858-1932) mostrava che per l'esistenza della soluzione, ma non per ottenere l'unicità, era sufficiente richiedere la continuità del dato f .

Accanto a quello di Cauchy-Lipschitz fu elaborato un secondo metodo detto delle *approssimazioni successive*, descritto all'abate Moigno (1804-1894) e reso rigoroso nel 1890 da Picard (1856-1941).

Modello a crescita limitata

Nel modelli che abbiamo descritto la popolazione cresce o decresce con il tempo in modo esponenziale. Tuttavia nessun organismo e nessuna popolazione cresce indefinitamente, infatti ci sono dei limiti ovvi posti dalla scarsità di cibo o di alloggio o da cause fisiche e oggettive.

Supponiamo che l'accrescimento di una popolazione abbia un limite superiore e quindi il numero degli individui $N(t)$ tende asintoticamente ad una costante $B > 0$ e di conseguenza $\dot{N}(t)$ tende a 0 con $B - N(t)$. La formulazione matematica è data dall'equazione

$$\dot{N}(t) = \frac{dN}{dt} = k(B - N(t)),$$

dove k è una costante positiva che rappresenta la velocità con cui $\dot{N}(t)$ tende a 0. Osserviamo che, dividendo per $B - N \neq 0$

$$\frac{dN(t)}{B - N(t)} = k dt.$$

Integrando si ottiene

$$-\log |B - N| = kt + C,$$

da cui segue

$$N = Ce^{-kt} + B.$$

Poichè N è sempre minore di B segue che la costante C è negativa e supponendo che $N(0) = 0$, si deve avere $C = -B$ e quindi la soluzione è data da $N(t) = B(1 - \exp(-kt))$.

La soluzione si può anche ottenere utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni lineari del teorema 1, che in questo caso particolare diventa:

$$y(t) = e^{-kt} \left(\int e^{kt} k B dt + C \right),$$

dal momento che $a(t) = -k$ e quindi $A(t) = -kt$. Segue che $y(t) = B + Ce^{-kt}$ e quindi $y(t) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Questo modello proposto da E. A. Mitscherlich nel 1939, si adatta ad alcuni dati sperimentali in agricoltura.

Equazioni di Bernoulli

Studiamo le equazioni dette di Bernoulli, che sono equazioni differenziali *non lineari* che hanno la forma

$$\dot{y} = a(t)y + b(t)y^\alpha, \quad (11)$$

con a, b funzioni continue. L'esponente α è un numero reale diverso da 0 e da 1, infatti per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, si ottengono equazioni lineari del tipo studiato nei precedenti paragrafi.

Osserviamo che per le equazioni di tipo Bernoulli si può dimostrare un teorema di esistenza ed unicità e quindi per ogni coppia (t_0, u_0) esiste un'unica $u = u(t)$ che soddisfa (11) tale che $u(t_0) = u_0$.

Supponiamo $\alpha > 0$ allora $u(t) = 0$ la funzione identicamente nulla è soluzione dell'equazione, quindi ogni altra soluzione è sempre diversa da 0, dal momento che la sua curva integrale non può intersecare l'asse delle x . Se $\alpha < 0$, l'eventuale soluzione in ogni t deve essere necessariamente diversa da 0.

Dividiamo ambo i membri dell'equazione per $y(t)$ supponendo di considerare soluzioni non nulle se $\alpha > 0$, si ottiene

$$\frac{\dot{y}}{y^\alpha} = a(t)y^{1-\alpha} + b(t). \quad (12)$$

Effettuiamo la sostituzione $z = y^{1-\alpha}$ dalla regola di derivazione di funzioni composte, si ottiene:

$$\dot{z}(t) = (1 - \alpha)y^\alpha \dot{y} \implies y^\alpha \dot{y} = \frac{\dot{z}}{1 - \alpha}$$

e quindi, sostituendo in (12), si ha:

$$\dot{z}(t) = (1 - \alpha)a(t)z + (1 - \alpha)b(t).$$

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine che si risolve con il metodo del Teorema 1 e da cui poi si ricava da $y(t) = (z(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Equazione logistica

È lecito chiedersi se i modelli di Malthus e quello della crescita limitata hanno qualche aderenza con la realtà.

Il modello di Malthus si adatta allo sviluppo di alcune specie, come la crescita di batteri in vitro ed in modo sorprendente anche alla crescita della popolazione umana.

Sia $N(t)$ la popolazione umana sulla terra: si è stimato che sia cresciuta del due per cento all'anno nella decade 1960-1970. Alla metà di questi dieci anni, nel 1965, la popolazione terrestre era stimata dell'ordine di 3,34 miliardi di persone.

Dunque poniamo l'origine dello studio $t(0) = t_0 = 1965$, sappiamo che $N(t_0) = 3,34 \times 10^9$, inoltre $\epsilon = \lambda - \mu = 0,02 = 2 \times 10^{-2}$.

Applicando il modello di Malthus all'evoluzione della popolazione umana si ha che:

$$N(t) = 3,34 \times 10^9 \times \exp(0,02t).$$

Un modo per verificare l'attendibilità della formula di Malthus è di calcolare il tempo necessario affinché la popolazione raddoppi, calcoliamo dunque il tempo di raddoppio T secondo la formula stabilita da Malthus:

$$N(T) = 3,34 \times 10^9 \times \exp(0,02T) = 2N(0) = 2 \times 3,34 \times 10^9,$$

si deduce che

$$\exp(0,02T) = 2.$$

e quindi

$$T = 50 \times \log 2 = 34,6.$$

Il valore di T dedotto dalla legge di Malthus si trova un valore assai vicino a quello osservato, infatti è stato calcolato che nell'anno 2000, dopo 35 anni, la popolazione umana si era di fatto raddoppiata.

Tuttavia se la popolazione terrestre continuasse a crescere con questa legge, presto la superficie terrestre non sarà sufficiente a contenerci tutti. Si può prevedere che pensando di vivere anche sull'acqua, nel 2625 ci sarebbe a mala pena spazio per stare tutti in piedi e nel 2660 bisognerebbe stare in piedi uno sulle spalle dell'altro.

È lecito quindi supporre che una popolazione, segue la legge di Malthus, quando non è troppo numerosa, ma non è un modello attendibile dell'evoluzione a lungo termine. Quando una popolazione cresce, la capacità dell'ambiente a sopportare tale crescita diminuisce. Infatti, una popolazione numerosa

comporta minori risorse per ciascun individuo e di conseguenza gli individui entrano in competizione l'uno con l'altro per lo sfruttamento delle risorse disponibili e si viene a determinare, per la diminuzione di fertilità ed aumento della mortalità, un minore tasso di crescita.

Nel 1837 Verhulst propose di introdurre un termine che tenesse conto di questa competizione, relativa alle risorse ed ai fattori esterni.

Consideriamo $N(t)$ il numero di individui in una popolazione all'istante t . L'equazione di Malthus $\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N$ contempla, come abbiamo visto una crescita esponenziale mentre nella crescita limitata, $\dot{N}(t) = k(B - N)$, si stabilisce una crescita che all'inizio è più lineare e successivamente si avvicina al valore limite B , che rappresenta il numero massimo di individui che possono sopravvivere nell'ambiente.

Per ottenere un modello di crescita biologicamente significativo, Verhulst pensò di combinare le due approssimazioni supponendo che \dot{N} fosse proporzionale sia a N che a $B - N$:

$$\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N(t)(B - N(t)). \quad (13)$$

La precedente equazione prende il nome di **equazione logistica o di Verhulst**. Riscriviamola nella forma

$$\dot{N}(t) = kBN(t) - k(N(t))^2,$$

con $k = \lambda - \mu$ e B costanti positive.

Il termine kBN , che rappresenta la crescita esponenziale è mitigato da $-kN^2$ che corrisponde alla competizione all'interno della popolazione e può essere interpretato come una sorta di attrito-impatto sociale proporzionale al numero di incontri tra individui nell'unità di tempo, infatti si suppone che la media statistica del numero di incontri tra due individui per unità di tempo è proporzionale a N^2 .

Quando N non è troppo grande il termine $-kN^2$ è trascurabile rispetto a kBN e la popolazione cresce in modo esponenziale. Quando N diventa grande il termine $-kN^2$ non è più trascurabile e determina il rallentamento del rapido tasso di crescita.

L'equazione logistica (13) è un'equazione di Bernoulli e si ha che per ogni (t_0, y_0) esiste un'unica $u = u(t)$ soluzione dell'equazione tale che $u(t_0) = y_0$.

Determiniamo le soluzioni dell'equazione logistica (13). Si tratta di un'equazione non lineare di tipo Bernoulli con $\alpha = 2$ e si prova facilmente le rette $y = 0$

e $y = \frac{1}{k}$ sono soluzioni dell'equazione. Inoltre, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, le altre curve integrali dell'equazione non intersecano le $y = 0$ e $y = \frac{1}{k}$.

L'equazione (13)

$$\dot{y}(t) = kB y(t) - k y^2(t),$$

è del tipo (11) con $\alpha = 2$, $a(t) = kB$ e $b(t) = k$ e quindi se $y \neq 0$ e ponendo $z = y^{-1}$ si ottiene la seguente equazione lineare:

$$\dot{z}(t) = -kBz(t) + k,$$

da cui

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-kBt} \left(\int k e^{kBt} k dt + C \right) = \\ &= e^{-kBt} \left(\frac{1}{B} e^{kBt} + C \right) = \frac{1}{B} + C e^{-kBt}, \end{aligned}$$

e quindi

$$z(t) = \frac{BCe^{-kBt} + 1}{B} \implies y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{B}{BCe^{-kBt} + 1}.$$

La soluzione dell'equazione logistica (13) diventa

$$N(t) = \frac{B}{CB e^{-kBt} + 1}.$$

Determiniamo l'unica soluzione che soddisfa alla condizione $N(0) = N_0$, poichè

$$N(0) = \frac{C}{1 + BC} = N_0 \implies \frac{B}{N_0} - 1 = BC \implies C = \frac{B - N_0}{BN_0},$$

e quindi

$$N(t) = \frac{BN_0}{N_0 + (B - N_0)e^{-kBt}}$$

Studiamo la soluzione $N(t)$ al variare di B , k e N_0 . La costante B si chiama *capacità dell'ambiente* e si vede che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = B$$

Al variare del valore iniziale N_0 la soluzione si trova sempre compresa tra le rette $y = 0$ e $y = B$, senza intersecarle. Calcoliamo la derivata prima di $N(t)$

$$\dot{N}(t) = -BN_0 \frac{(B - N_0)}{(N_0 + (B - N_0)e^{-kBt})^2} (-kB) e^{-kBt}.$$

Se $B < N_0$ allora la soluzione é decrescente, dal momento che $\dot{N} < 0$.

Se $0 < N_0 < B$ la soluzione é crescente dal momento che $\dot{N} > 0$.

Se $B = N_0$ la soluzione é costante e quindi la popolazione rimane costante nel tempo $N(t) = B$.

Torniamo all'equazione:

$$\dot{N}(t) = kN(t)(B - N(t)),$$

e deriviamo ambo i membri

$$N\ddot{N}(t) = k\dot{N}(t)(B - kN(t)) - kN(t)\dot{N}(t) = k\dot{N}(t)(B - 2N(t)).$$

Quindi $N(t)$ ha un punto di flesso, infatti la derivata seconda si annulla in un punto \bar{t} tale che $N(\bar{t}) = \frac{B}{2}$ e si vede che

$$\bar{t} = \frac{1}{KB} \log\left(\frac{B}{N_0} - 1\right).$$

La funzione $N(t)$ é convessa per $t < \bar{t}$ e poi diventa concava.

Si osserva che $N = N(t)$ cresce lentamente intorno a $t = 0$, poi la crescita diventa più rapida fino al punto di flesso ed infine rallenta, avvicinandosi in modo asintotico al valore B all'infinito. La soluzione ha un asintoto orizzontale all'infinito nella retta $y = B$. Inoltre ha un andamento quasi esponenziale intorno all'origine, si può dire che segue il modello di Malthus per tempi piccoli ed il modello logistico interviene quando il tempo aumenta e quindi la popolazione aumenta.

Vi sono alcuni esempi significativi che confermano l'aderenza alla realtà della legge logistica, il primo è legato all'esperimento del biologo G.F. Gause sullo sviluppo di un protozoo detto *Paramecium Caudatum* ed il secondo relativo all'esperimento dello statistico Pearl, che allevò in laboratorio una popolazione di *Drosophila Melanogaster*, e la curva di evoluzione ottenuta in modo sperimentale è una buona approssimazione di quella logistica. L'andamento qualitativo é descritto abbastanza bene in popolazioni con risorse limitate e quando sono trascurati alcuni fattori che contribuiscono alla crescita.

In alcuni modelli di crescita della popolazione mondiale, supponendo che la dinamica sia retta dall'equazione logistica, calcolando i parametri dell'equazione tenendo conto delle analisi statistiche dei dati sperimentali (Metodo dei minimi quadrati) si ha che la crescita segue la funzione:

$$N(t) = \frac{12}{1 + \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1998-t}{11}}},$$

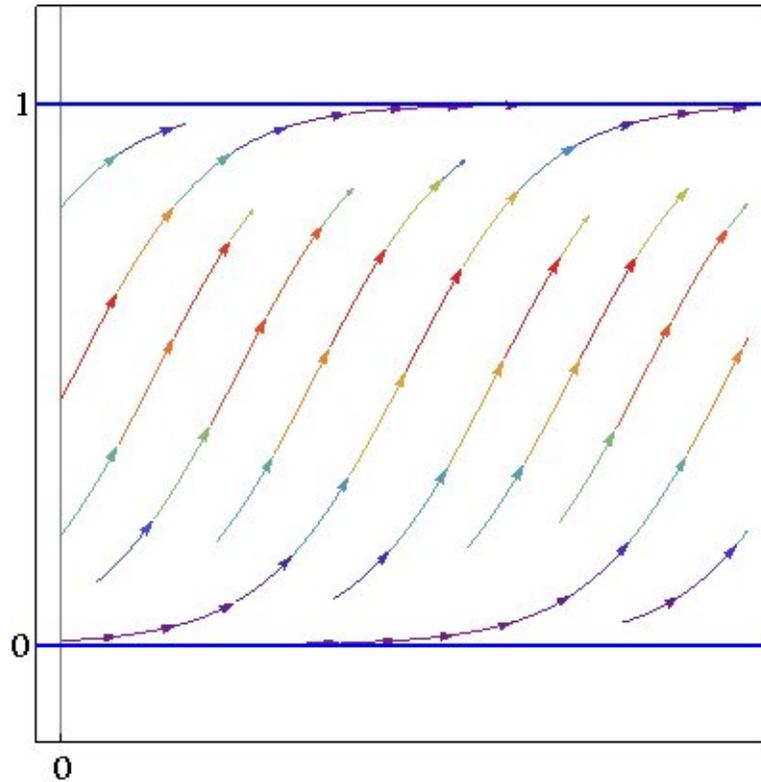


Figura 0.1. Crescita di una popolazione di batteri con risorse e spazio limitati.

quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 12 \text{ miliardi di individui,}$$

ed è quindi evidente che il modello deve essere corretto visto che la popolazione mondiale è arrivata a 12 miliardi nel 2011.

ESEMPIO 1. *Supponiamo di avere una popolazione che si evolve con la legge*

$$N(t) = \frac{2000}{20 - 19e^{-\frac{t}{400}}},$$

quindi $N(0) = 2000$, il denominatore deve essere diverso da 0 ma poichè si ha che

$$20 - 19e^{-\frac{t}{400}} = 0 \Leftrightarrow \bar{t} = -400 \log\left(\frac{20}{19}\right),$$

e il modello ha senso per $t > 0$.

La derivata prima della funzione $N(t)$ è data da:

$$\dot{N}(t) = 2000 \frac{-\frac{19}{400} e^{-\frac{t}{400}}}{(20 - 19e^{-\frac{t}{400}})^2} < 0,$$

quindi $N(t)$ decresce e $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 100$.

ESEMPIO 2. Supponiamo che una popolazione di batteri in laboratorio segue il modello

$$\dot{N}(t) = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} N(t),$$

vogliamo conoscere il suo andamento asintotico all'infinito. L'equazione ha la forma

$$y' = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} y \Rightarrow \log(y(t)) = -\log(1 + e^{-2t}) + \log C,$$

quindi $N(t) = \frac{C}{1 + e^{-2t}}$. Se all'istante $t = 0$ si ha $N(0) = 2000$ allora si trova che $C = 4000$ e quindi

$$N(t) = \frac{4000}{1 + e^{-2t}}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 4000.$$

ESEMPIO 3. Un modello di crescita della massa dei tumori ha la forma

$$\dot{M}(t) = -bM(t) + aM^{\frac{3}{2}}(t)$$

quindi si tratta di un'equazione di tipo Bernoulli con $\alpha = \frac{3}{2}$.

Trasmissione di un' infezione

Primo Modello

Vi sono altri fenomeni che hanno un'interpretazione matematica con la stessa equazione, come la trasmissione di un' infezione. Supponiamo di inserire in un popolazione di individui, ugualmente sensibili, un soggetto contagioso e supponiamo che un individuo, che viene contagiato, rimanga portatore d'infezione durante il processo e nessuno si allontani.

Sia $s = s(t)$ il numero di soggetti sensibili e $m = m(t)$ il numero di quelli contagiosi all'istante t e sia N l'ampiezza totale della popolazione in cui viene

introdotto un soggetto contagioso, si ha: $m + s = N + 1$. Il tasso al quale il numero di soggetti contagiosi aumenta è allora data da $\dot{m}(t)$. Più i soggetti contagiosi e quelli sensibili sono presenti, più ci saranno contatti che portano all'infezione. È ragionevole supporre che \dot{m} sia proporzionale sia a s che a m . Si ottiene dunque l'equazione differenziale;

$$\dot{m}(t) = am(s + m) = am(N + 1 - m(t)),$$

dove a è una costante positiva chiamata **tasso specifico d'infezione**. La soluzione è data da:

$$m(t) = \frac{N + 1}{1 + Ce^{-a(N+1)t}}.$$

Supponendo che il processo sia iniziato al tempo $t = 0$ con un solo soggetto contagioso si ottiene $m(0) = 1 = \frac{N + 1}{1 + C}$ da cui $C = N$.

La diffusione della malattia segue la legge logistica: all'inizio il numero dei soggetti contagiati aumenta lentamente poi il processo accelera ed infine si assesta.

In questo modello la diffusione si arresta quando tutti gli individui sono infettati, infatti $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = N + 1$.

Secondo Modello: epidemia di tipo SIS

Si tratta dello studio dell'evoluzione di malattie contagiose ma non mortali: SIS sta per *suscettibili-infetti-suscettibili*, ad esempio il raffreddore. La malattia si sviluppa secondo un ciclo chiuso: un individuo sano si infetta per contatto con un malato, a sua volta infetta altri individui sani, poi guarisce ma ritorna suscettibile al contagio. Si suppone di avere a che fare con una popolazione isolata formata da N_{tot} individui divisa in $m(t)$ di "infetti" e $s(t) = N_{\text{tot}} - m(t)$ di "suscettibili". La malattia non è immunizzante e quindi un infetto, anche se guarisce torna nel novero dei suscettibili. Il modello matematico si esprime attraverso un'equazione differenziale della forma:

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= am(t)s(t) - bm(t) = am(t)(N_{\text{tot}} - m(t)) - bm(t) = & (14) \\ &= a N_{\text{tot}} m(t) - a m^2(t) - bm(t) \end{aligned}$$

Quindi in questo caso l'equazione diventa:

$$\dot{m}(t) = (a N_{\text{tot}} - b) m(t) - a m^2(t).$$

La quantità a è il tasso d'infezione o anche *fattore di contagiosità* e b rappresenta il *tasso di guarigione*.

Si tratta di equazione di Bernoulli dello stesso tipo del primo modello ma in questo caso:

$$\text{al posto di } a(N+1) \text{ si ha } aN_{\text{tot}} - b,$$

e $aN_{\text{tot}} - b$ può essere positivo, negativo o nullo e quindi:

$$m(t) = \frac{aN_{\text{tot}} - b}{1 + C e^{(aN_{\text{tot}} - b)t}}$$

Ponendo $m(0) = m_0$, che rappresenta il numero dei malati all'istante iniziale si ha che la soluzione ha la forma:

$$m(t) = \frac{m_0(aN_{\text{tot}} - b)}{m_0 a + (aN_{\text{tot}} - m_0 - b)e^{-(aN_{\text{tot}} - b)t}} \quad (15)$$

Diamo un'idea qualitativa della soluzione:

- Sia $aN_{\text{tot}} - b > 0$, siamo nel caso del primo modello ma con maggiore precisione, infatti si vede che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = N_{\text{tot}} - \frac{b}{a}$$

nella popolazione rimane qualche individuo malato ma non sono stati tutti infettati.

- Sia $aN_{\text{tot}} - b < 0$, in questo caso il numero dei malati decresce a 0 all'infinito infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = 0.$$

Quindi esiste un valore soglia $\frac{b}{a}$ per il numero di individui nella popolazione tale che se $N_{\text{tot}} < \frac{b}{a}$ la malattia non si innesca se invece $N_{\text{tot}} > \frac{b}{a}$, la malattia diventa endemica, in questo caso ci sono sempre individui malati nella popolazione. Questo valore dipende dal fattore di contagiosità e dal tasso di guarigione della malattia in esame. Se la malattia è poco contagiosa (a piccolo) e dalla quale si guarisce in fretta b grande, si ha che il rapporto tra queste due quantità $\frac{b}{a}$ è grande ed allora la malattia non si diffonde in una comunità con pochi individui, infatti in questo caso sarà $N_{\text{tot}} < \frac{b}{a}$.

Nel caso $N_{\text{tot}} - \frac{b}{a} = 0$, l'equazione diventa:

$$\dot{m}(t) = -am^2(t) \Rightarrow \frac{\dot{m}(t)}{m^2(t)} = -a \Rightarrow -\frac{1}{m(t)} = -at + C \Rightarrow m(t) = \frac{1}{at + C}.$$

In questo caso il numero dei malati decresce all'infinito per $t \rightarrow +\infty$.

Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti

Partiamo dal problema di determinare il moto di un corpo sotto l'azione di una forza: legge di Newton: una particella di massa m in un campo di forze F si muove in modo tale che il vettore forza in un certo istante t è uguale all'accelerazione della particella moltiplicata per la sua massa:

$$ma = F$$

e quindi:

$$a = \ddot{x}(t), \quad F = F(x(t)) \implies ma = \ddot{x}(t) = F(x(t))$$

Nel caso della caduta libera di un grave $F(x(t)) = -g$, con g costante che rappresenta l'accelerazione di gravità. In questo caso:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = -g &\implies \dot{x}(t) = -gt + C_1 \implies \\ \implies x(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine *lineare e a coefficienti costanti*.

Per questo tipo di equazioni la teoria è completa e le soluzioni sono note in modo esplicito.

L'equazione di secondo ordine lineare e a coefficienti costanti ha la forma

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t) \quad (17)$$

dove la funzione f e le costanti a, b sono assegnate.

Quando f è identicamente nulla l'equazione si dice *omogenea*.

Data un'equazione della forma (17) omogenea le soluzioni sono collegate alle radici della seguente equazione algebrica, detta *caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Infatti le soluzioni sono tutte e sole della forma

$$u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) \quad (18)$$

dove

(a) se $\Delta = a^2 - 4b > 0$ allora

$$u_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad u_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (19)$$

dove λ_1, λ_2 sono le soluzioni dell'equazione caratteristica.

(b) se $\Delta = a^2 - 4b = 0$ allora

$$u_1 = e^{\lambda t}, u_2(t) = te^{\lambda t} \text{ con } \lambda = \frac{-a}{2} \quad (20)$$

dove λ è l'unica soluzione dell'equazione caratteristica.

(c) se $\Delta = a^2 - 4b < 0$ allora

$$u_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad u_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (21)$$

con

$$\alpha = \frac{-a}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

dal momento che $\Delta < 0$ l'equazione caratteristica non ha soluzioni reali.

Le soluzioni sono quindi legate al valore del discriminante Δ dell'equazione caratteristica e può essere giustificata sulla base delle seguenti considerazioni. Proviamo a richiedere che $e^{\lambda t}$ sia soluzione dell'equazione omogenea: se si impone tale condizione si ottiene l'equazione

$$(e^{\lambda t})'' + a(e^{\lambda t})' + b(e^{\lambda t}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

che a sua volta fornisce l'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Pertanto $e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se λ è soluzione dell'equazione caratteristica. Se $\Delta > 0$ esistono due soluzioni di questo tipo (caso (a)).

Si verifica facilmente che se $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea allora anche una qualsiasi loro combinazione lineare del tipo $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$ è ancora soluzione.

Un'altra possibile soluzione dell'equazione omogenea è $te^{\lambda t}$: se si impone che questa particolare funzione risolve l'equazione omogenea si trova con facili passaggi la relazione

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)t + (2\lambda + a) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

la quale risulta soddisfatta se e solo se

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad 2\lambda + a = 0$$

Queste due relazioni sono compatibili se e solo se $\Delta = 0$. In questo caso non solo $u_1(t) = te^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione omogenea, ma lo è anche

$u_2(t) = e^{\lambda t}$: come prima anche una qualsiasi loro combinazione lineare del tipo $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$ è ancora soluzione dell'equazione omogenea.

Il terzo caso nasce dal provare sotto quali condizioni l'equazione omogenea ammette soluzioni del tipo $u_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ oppure $u_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. In entrambi i casi si trova che questa eventualità si verifica se e solo se

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 0, \quad 2\alpha\beta + a\beta = 0$$

che equivale a scrivere

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad a^2 - 4b = -4\beta^2$$

ovvero che Δ è negativo. Esattamente come prima anche una qualsiasi loro combinazione lineare del tipo $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$ è ancora soluzione dell'equazione omogenea.

Provare invece che quelle che abbiamo individuato esauriscono tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea di secondo ordine a coefficienti costanti è decisamente più complicato e ce ne asteniamo.

Si può dimostrare che anche per questo tipo di equazioni vale un teorema di esistenza ed unicità, tenendo conto che rispetto al caso dell'equazione del primo ordine consiste nel fatto che essendo due le costanti occorrono *due* condizioni iniziali, una per u e una per u' .

Il problema di Cauchy consiste nel trovare l'unica soluzione dell'equazione (17) che soddisfa le condizioni iniziali

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1 \quad (22)$$

Il teorema di Cauchy garantisce che il problema appena posto ha una ed una sola soluzione. Di conseguenza le costanti C_1, C_2 che sono nell'espressione della soluzione u dell'equazione omogenea vengono determinate mediante (22).

Diamo due esempi legati a modelli di natura fisica.

ESEMPIO 4. Consideriamo un corpo di massa m che si muove sotto l'azione di una forza che è proporzionale alla distanza da 0, l'equazione del moto ha la forma:

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) = -\omega^2 x(t),$$

si tratta quindi di studiare l'equazione differenziale (lineare, del secondo ordine e autonoma)

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad (23)$$

dove ω è un parametro reale positivo. In tal caso l'equazione caratteristica ha la forma $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, ha il ($\Delta < 0$ e $\alpha = 0$ e $\beta = \omega$), quindi tutte le soluzioni sono rappresentate dalla famiglia di funzioni

$$u(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con C_1 e C_2 costanti reali arbitrarie. Dal'altra parte da una verifica diretta segue:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \\ u'(t) &= C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t, \\ u''(t) &= -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t, \end{aligned}$$

e quindi $(u, u', u'') \in \mathbb{R}^3$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; inoltre

$$u''(t) = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

e per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, il che prova che u è una soluzione dell'equazione data.

L'equazione (23) prende anche il nome di legge differenziale del moto armonico ed ha una semplicissima interpretazione fisica. Se $P(t)$ è un punto di coordinate $(x(t), y(t))$ che si muove su una circonferenza di centro l'origine e raggio arbitrariamente prefissato con velocità angolare costante pari ad ω , allora x e y risolvono separatamente la (23), ovvero le proiezioni di un moto circolare uniforme sugli assi coordinati sono moti armonici.

Le costanti C_1, C_2 possono essere riscritte nella forma

$$C_1 = -R \sin \varphi_0, \quad C_2 = R \cos \varphi_0,$$

dove $R > 0$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Così facendo la prima delle (24) si riscrive nella forma

$$u(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (25)$$

la quale evidenzia il significato fisico-geometrico delle costanti arbitrarie R e φ_0 : la prima è il raggio della circonferenza su cui avviene il moto di P (ed è detta semi-ampiezza del moto armonico), mentre φ_0 individua la posizione angolare di P all'istante $t = 0$ (ed è detta fase iniziale).

Il parametro ω è detto pulsazione ed è legato alla frequenza di oscillazione ν dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$.

ESEMPIO 5. L'esempio precedente descrive la legge delle oscillazioni di un corpo non soggetto ad attriti, libero di muoversi lungo una retta orizzontale

ed attratto verso un punto fisso di tale retta da una forza elastica ideale. Tale appare infatti la proiezione lungo il diametro del moto circolare uniforme.

Lo stesso modello fisico si può complicare leggermente aggiungendo una resistenza viscosa, quale si otterrebbe ad esempio se il corpo fosse immerso in un fluido (acqua, aria).

A basse velocità la resistenza viscosa è proporzionale al quadrato della velocità istantanea $u'(t)$ ovvero l'equazione del moto si scriverebbe nella forma

$$mu'' = -\mu(u')^2 - hu$$

dove μ rappresenta la viscosità cinematica del mezzo fluido in cui si muove il corpo e h è il modulo di Young della molla che attrae il punto di massa m nell'origine O della retta (supposta orizzontale).

La presenza del termine quadratico rende l'equazione del moto di tipo non lineare e la trattazione molto più complessa rispetto ai limiti di questo corso. Pertanto ci limiteremo ad una procedura di "prima approssimazione". In altre parole, se u' non si discosta molto dal valore nullo, si può approssimare ad ogni istante $(u')^2$ con $2u'$, cioè il suo sviluppo di Maclaurin arrestato al primo ordine.

Studiamo l'equazione supponendo $m = 1$, quindi si ottiene un'equazione omogenea della forma:

$$u'' + 2\mu u' + hu = 0.$$

A questo punto, utilizzando la formula generale per l'equazione del secondo ordine omogenea tenendo conto che l'equazione caratteristica ha la forma

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + h = 0,$$

con $\Delta = \mu^2 - h$ si conclude come segue

- Se $\mu^2 > h$ allora risulta

$$\lambda_1 = (-\mu - \sqrt{\mu^2 - h}) < \lambda_2 = (-\mu + \sqrt{\mu^2 - h}) < 0$$

e quindi la soluzione

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

decade quindi a zero nel tempo con legge esponenziale, in questo caso vi è una forte resistenza, ad esempio nell'acqua.

- Se $\mu^2 = h$ allora risulta $\lambda = -\mu$; la soluzione

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t},$$

decade a zero nel tempo con legge esponenziale ma più lentamente rispetto al caso precedente.

- Se $\mu^2 < h$ allora risulta $\alpha = -\mu$ e $\beta = \sqrt{-\mu^2 + h}$; la soluzione

$$u(t) = C_1 e^{-\mu t} \cos(\sqrt{-\mu^2 + h} t) + C_2 e^{-\mu t} \sin(\sqrt{-\mu^2 + h} t),$$

decade comunque a zero nel tempo con legge esponenziale ($e^{-\mu t}$ con esponente negativo) come nei casi precedenti ma compie, a differenza di prima, infinite oscillazioni di ampiezza sempre più piccole. In questo caso la resistenza al moto è piccola, ad esempio nell'aria.

Consideriamo (17) con il dato f non identicamente nulla, allora si può dimostrare che tutte e sole le soluzioni della (17) sono rappresentate dalla famiglia di soluzioni $u_{\text{om}}(t)$ dell'equazione omogenea a cui va aggiunta una soluzione particolare $u^*(t)$ dell'equazione non omogenea.

In altre parole tutte e sole le soluzioni della (17) sono rappresentate dalla formula

$$u_{\text{nom}}(t) = u_{\text{om}}(t) + u^*(t), \quad (26)$$

Diamo le procedure per determinare una soluzione u^* quando f (detto anche "termine noto" o nella sua interpretazione fisica "termine forzante") ha una forma particolare.

Ci sono situazioni particolarmente semplici in cui la risposta è immediata.

a) Supponiamo

$$f(t) = P_n(t) = \sum_{h=0}^n a_h t^h$$

(cioè f è un polinomio di grado n). Allora si dovrà cercare u^* nella forma

$$u^* = \sum_{h=0}^n A_h t^h,$$

sostituendo tale forma di u^* a primo membro dell'equazione si otterrà una identità fra due polinomi, quello a primo membro in cui compaiono solo i coefficienti incogniti A_h e quello a secondo membro in cui appaiono solo i coefficienti noti a_h .

Il *principio di identità dei polinomi* afferma che due polinomi coincidono se e solo se i coefficienti dei monomi t^h aventi stesso grado sono identici.

Imponendo tale condizione si ottiene un sistema algebrico di $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite A_h .

b) Se

$$f(t) = e^{\lambda t} P_n(t) = e^{\lambda t} \sum_{h=0}^n a_h t^h$$

, e λ non è soluzione dell'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, (o, equivalentemente, $e^{\lambda t}$ non è soluzione dell'equazione omogenea). Allora si dovrà cercare u^* nella forma

$$u^* = e^{\lambda t} \sum_{h=0}^n A_h t^h$$

e procedere come in precedenza.

c) Supponiamo il termine noto f della forma:

$$f(t) = P_n(t) \cos(\lambda t), \text{ o } f(t) = Q_m(t) \sin(\lambda t),$$

oppure ancora, più in generale

$$f(t) = P_n(t) \cos(\lambda t) + Q_m(t) \sin(\lambda t).$$

Si dovrà cercare in ogni caso una soluzione del tipo

$$u^* = \sin(\lambda t) \sum_{h=0}^s A_h t^h + \cos(\lambda t) \sum_{h=0}^s B_h t^h$$

dove s è il maggiore fra i due numeri n ed m . Perché il metodo funzioni occorre che $\sin(\lambda t)$ e $\cos(\lambda t)$ non siano soluzioni dell'equazione omogenea.

È opportuno notare che il caso a) è un caso particolare del b) quando $\lambda = 0$ e quindi in questo caso occorre che $\lambda = 0$ non sia soluzione dell'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Si noti anche che il grado del polinomio P_n può essere nullo (con che il polinomio si riduce ad una costante).

Diamo infine alcuni esempi in cui l'equazione del secondo ordine è associata ad un problema di Cauchy.

ESEMPIO 6. *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} 2u'' + 3u' = te^{-t} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica si scrive $2\lambda^2 + 3\lambda = 0$, quindi $u_{\text{om}}(t) = C_1 + C_2 e^{-3t/2}$. La soluzione particolare può essere messa nella forma $u^*(t) = (A + Bt)e^{-t}$; sostituendo abbiamo

$$-Bt - (A + B) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi $u^*(t) = (1 - t)e^{-t}$. Imponiamo ora alla $u_{\text{nom}}(t) = C_1 + C_2 e^{-3t/2} + (1 - t)e^{-t}$ di soddisfare le condizioni iniziali: si trova

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1 \\ 1 = -\frac{3C_2}{2} - 2 \end{cases}$$

ovvero $C_1 = 1$ e $C_2 = -2$ e quindi $u_{\text{nom}}(t) = 1 - 2e^{-3t/2} + (1 - t)e^{-t}$

ESEMPIO 7. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'' - 2u' + u = t - t^2 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica si scrive $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, quindi $u_{\text{om}}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$. La soluzione particolare può essere messa nella forma $u^*(t) = (A + Bt + Ct^2)$; sostituendo e ordinando rispetto a t abbiamo

$$(A - 2B + 2C) + (-1 + B - 4C)t + (-1 + C)t^2 = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Risolviendo il corrispondente sistema di Cramer per le costanti si trova $(A, B, C) = (8, 5, 1)$ e quindi $u_{\text{nom}}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + (8 + 5t + t^2)$. Imponendo le condizioni iniziali si trova infine

$$u_{\text{nom}}(t) = -t^2 - 3t - e^t(t - 5) - 4$$

ESEMPIO 8. Consideriamo l'equazione:

$$y'' - 5y' = 3e^{2x}$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 5$, l'integrale generale ha la forma

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{5x}$$

Dal momento che 2 non è soluzione della caratteristica, su ha che la soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ae^{2x}$ e si vede facilmente che $A = -\frac{1}{2}$.

Equazioni a variabili separabili

Se $F(u, t)$ non ha la forma $a(t)u + b(t)$, cioè quella di una “retta” nel piano delle variabili u, F , siamo in presenza di una equazione del primo ordine $u' = F(u, t)$ non lineare e le cose sono in genere molto più complicate. Fa eccezione il caso in cui F si presenta nella forma di un prodotto di una funzione della sola u per una funzione della sola t , ovvero

$$u' = g(t)h(u). \quad (27)$$

nel qual caso l'equazione differenziale è detta a *variabili separate* (o *separabili*). Il metodo per risolverla è il seguente.

È quindi comunque utile esaminare il grafico di $h(u)$ per avere indicazioni di massima sul comportamento delle soluzioni di equazioni del tipo $u' = h(u)$ ancor prima di risolverle.

Nell'insieme in cui la funzione h non è mai nulla e l'equazione (27) ha soluzioni che si trovano con la procedura seguente: si divide la (27) per h e si integrano ambo i membri dell'equazione risultante dopo aver eseguito, nell'integrale a primo membro, il cambiamento di variabile $u(t) = w$. Si ha dunque

$$\int \frac{u'(t)}{h[u(t)]} dt = \int \frac{dw}{h(w)} = C + \int g(t) dt. \quad (28)$$

Detta $G(w)$ una primitiva¹ di $1/h(w)$ si ottiene

$$G(w) = C + \int g(t) dt. \quad (29)$$

In generale G è invertibile ed allora la classe delle soluzioni è rappresentata dalla famiglia ad un parametro

$$u(t) = G^{-1} \left(C + \int g(t) dt \right). \quad (30)$$

La rappresentazione della soluzione resterà in genere implicita sia se G non è elementarmente esprimibile, sia quando, pur essendolo, è la sua inversa G^{-1} a non esserlo.

¹ La continuità di h garantisce che l'esistenza di G ; ovviamente i punti estremi degli intervalli \mathcal{K}_i determinano delle singolarità di $1/h(u)$ che potrebbero non essere integrabili ma in questa fase non stiamo calcolando ancora particolari soluzioni e quindi le primitive $G(u)$ sono intese nel senso dell'integrale indefinito, cioè come famiglia delle funzioni la cui derivata coincide con $1/h(u)$.

ESEMPIO 9. Consideriamo l'equazione non lineare (del primo ordine e autonoma)

$$u' = u^2. \quad (31)$$

L'equazione è a variabili separate con $g(t) = 1$ ed $h(u) = u^2$. La funzione $u(t) = 0$ per ogni t è l'unica soluzione stazionaria. Le altre soluzioni si trovano integrando:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dt$$

da cui si trova subito la relazione

$$-1/u = t + C.$$

Dunque ogni funzione $u(t) = -1/(t + C)$, con $t \neq -C$ e con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria, è una soluzione dell'equazione (31) (come è facile verificare anche direttamente). Si noti che $u(t) \equiv 0$ risolve l'equazione ma non rientra, per alcun valore di C , fra quelle del tipo precedente. Le soluzioni sono definite solo se $t \neq -C$ mentre la soluzione identicamente nulla è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 10. Consideriamo l'equazione non lineare (del primo ordine e autonoma)

$$u' = u(u^2 - 1). \quad (32)$$

L'equazione è a variabili separate con $g(t) = 1$ ed $h(u) = u^2$. Esistono tre soluzioni stazionarie

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = -1, \quad u_3(t) = +1.$$

Le altre soluzioni si trovano integrando

$$\int \frac{du}{u(u^2 - 1)} = \int dt$$

da cui si trova subito la relazione

$$\frac{1}{2} \log |u^2 - 1| - \log |u| = t + C$$

che possiamo riscrivere più semplicemente nella forma

$$\log \frac{|u^2 - 1|}{u^2} = 2t + C$$

da cui si ricava con semplici passaggi

$$\left|1 - \frac{1}{u^2}\right| = \bar{C}e^{2t}$$

dove $\bar{C} = e^C$ rimane arbitraria purché positiva. Distinguendo due intervalli di valori della $u \neq 0$ si ottiene

$$|u(t)| = \frac{1}{1 - \bar{C}e^{2t}} \quad \text{per } |u| > 1 \quad (33)$$

$$|u(t)| = \frac{1}{1 - \bar{C}e^{2t}} \quad \text{per } |u| > 1 \quad (34)$$

Interazione tra due popolazioni

Lo studio delle interazioni tra due popolazioni che si trovano a coabitare in uno stesso territorio è notevolmente più complesso. È infatti necessario tenere conto sia del comportamento delle singole popolazioni sia delle correlazioni e delle modifiche che risultano apportate allo sviluppo dell'una e dell'altra e supporre che le due popolazioni influiscano sull'evoluzione dell'altra.

Supponiamo che due popolazioni, per esempio di microrganismi, di insetti o di mammiferi, convivano nello stesso territorio e interagiscano tra loro in modo tale che la crescita del numero dei componenti di ciascuna popolazione dipenda oltre che da se stessa anche dall'altra.

Questo problema dal punto di vista matematico porta a dover considerare non un'unica equazione differenziale ma bensì un **sistema di due equazioni differenziali**. Indichiamo con $x = x(t)$ e $y = y(t)$ i numeri degli individui appartenenti alle due popolazioni e è ragionevole supporre che al variare del tempo le variazioni delle due popolazioni sia funzione sia di $x = x(t)$ e di $y = y(t)$. In alcuni casi questa dipendenza è di proporzionalità e della forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (35)$$

Nel seguito supponiamo che le costanti a, b, c, d siano positive.

Tra le due popolazioni si possono osservare tre tipi di interazioni.

- di **cooperazione**, quando le popolazioni traggono giovamento l'una dall'altra a causa della loro coesistenza. In questo caso ciascuna delle due

popolazioni trova giovamento dall'altra e dunque non si ostacolano. Da altra parte è ragionevole supporre che per motivi di sovrappopolazione ciascuna popolazione invece non trae giovamento dal suo accrescimento e si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) - dy(t) \end{cases} \quad (36)$$

- di **competizione**, quando le popolazioni lottano tra loro le risorse in comune. In questo caso ciascuna delle due popolazioni è svantaggiata dall'aumentare dell'altra e trae invece giovamento dal proprio accrescere, in quanto un numero maggiore di individui la rende più forte nella competizione. In tale modello si avrà dunque;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - by(t) \\ \dot{y}(t) = -cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (37)$$

- di **preda-predatore**, quando una della due popolazioni ha bisogno dell'altra per sopravvivere. In questo caso assumiamo che la popolazione delle prede $x(t)$ decresce con il tempo rispetto al numero dei predatori $y(t)$ e cresca invece rispetto al numero delle prede stesse, mentre la popolazione dei predatori, questa cresce con il crescere delle prede, per cui $c > 0$ ma decresce con l'aumentare dei predatori stessi, in quanto vi è competizione tra loro per la sopravvivenza, Si ha quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) - dy(t) \end{cases} \quad (38)$$

Si vede che la presenza dei predatori inibisce la crescita delle prede, mentre i predatori crescono in presenza di prede ma la loro crescita è limitata dalla presenza delle altre prede. In questo modello, dopo un certo periodo di tempo le prede si estinguono e quindi anche i predatori per mancanza di prede. Questo modello è stato troppo semplificato, vedremo nella prossima sezione il modello di preda-predatore modificato ma che invece è realistico.

Le tre alternative conducono in prima approssimazione allo studio di sistemi di due equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti, che si differenziano per la scelta dei parametri.

Metodo di risoluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (39)$$

dove in questo caso a, b, c, d sono numeri reali positivi o negativi.

Moltiplichiamo la prima equazione per d e la seconda per $-b$ sommiamo le due equazioni ottenute, si ottiene:

$$d\dot{x}(t) - b\dot{y}(t) = (ad - bc)x \quad (40)$$

e quindi

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{b}[-(ad - bc)x + d\dot{x}(t)]$$

Deriviamo ora la prima equazione del sistema (39):

$$\ddot{x} = a\dot{x}(t) + \dot{y}(t)$$

sostituisco in quest'ultima equazione l'espressione che abbiamo ottenuto per \dot{y} e quindi

$$\ddot{x} = a\dot{x}(t) + d\dot{x}(t) - (ad - bc)x = (a + d)\dot{x}(t) - (ad - bc)x.$$

L'ultima è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine e una volta calcolata la soluzione x si ricava la y da (40).

ESEMPIO 11. *Consideriamo il sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = -4x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad (41)$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 2 e la seconda per -1 , sommando le due equazioni si ottiene:

$$2\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = 8x \implies \dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) - 8x$$

Derivando la prima equazione:

$$\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y}$$

sostituendo il valore di \dot{y} si ottiene:

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 8x \implies \ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = 0$$

L'equazione caratteristica è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ ha discriminante negativo e le soluzioni sono:

$$x(t) = C_1 e^{2t} \cos(2t) + C_2 e^{2t} \sin(2t)$$

sostituendo sia $x(t)$ che \dot{x} nella prima equazione del sistema si ricava:

$$y(t) = 2C_2 e^{2t} \cos(2t) - 2C_1 e^{2t} \sin(2t)$$

ESEMPIO 12. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad (42)$$

Si tratta di un sistema del tipo delle due popolazioni in competizione. Ragionando come prima, moltiplicando per 2 la prima equazione e per 3 la seconda e sommando si ottiene:

$$3\dot{y}(t) = -2\dot{x}(t) + x(t)$$

Derivando la prima equazione del sistema (42)

$$\ddot{x} = 4\dot{x} + x \implies \ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0$$

L'equazione caratteristica ha soluzioni $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$, la soluzione del sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= -3C_1 e^{(2+\sqrt{3})t} - 3C_2 e^{(2-\sqrt{3})t} \\ y(t) &= \sqrt{3}C_1 e^{(2+\sqrt{3})t} - \sqrt{3}C_2 e^{(2-\sqrt{3})t} \end{aligned}$$

I dati iniziali danno l'evoluzione delle due popolazioni, può succedere che all'infinito una delle due si estingua e l'altra cresca in modo esponenziale.

Modello Preda-Predatore di Lokta-Volterra

Come abbiamo osservato nel precedente paragrafo, nel modello **preda-predatore** i predatori hanno la meglio sulle prede, che dopo un certo tempo finito si estinguono provocando la successiva estinzione dei predatori stessi. Dal punto di vista matematico si vede che le soluzioni del sistema differenziale hanno un andamento periodico nel tempo ed il numero degli individui delle due popolazioni diventa zero in un tempo finito. Il modello non è realistico e dobbiamo concludere che abbiamo semplificato in modo eccessivo il fenomeno.

Come abbiamo già detto il modello corretto per il caso **preda-predatore** è dovuto al matematico italiano Vito Volterra (1860-1940), la cui biografia è molto interessante.

Vito Volterra era nato ad Ancona nel 1860, rimasto orfano all'età di due anni la sua famiglia rimase senza mezzi di sussistenza. Nonostante le difficoltà Volterra si laureò con onore presso l'Università di Firenze e molto presto divenne professore e scienziato di grande fama per le sue innovative ricerche nell'ambito dell'analisi matematica. Volterra era interessato non al solo studio teorico ma anche alle possibili applicazioni a problemi concreti. Nel 1900, in occasione dell'inaugurazione dell'anno accademico all'Università di Roma, Volterra aveva tenuto una conferenza dal titolo *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali*. Nel 1925, durante una conversazione con il giovane zoologo Umberto D'Ancona (1896-1964) venne a conoscenza di una curiosa circostanza nelle statistiche dei mercati ittici del Mare Adriatico. Risultava che durante la prima guerra mondiale e immediatamente dopo, quando le attività di pesca erano drasticamente diminuite, era in compenso aumentato il numero di predatori tra i pesci catturati. D'Ancona aveva condotto uno studio statistico sulle popolazioni dei pesci nel Mare Adriatico nel periodo 1910-1923. I risultati della ricerca mostravano che, contrariamente a quanto si poteva immaginare, nonostante la riduzione della pesca nel periodo della guerra, non c'era stato un aumento del pescato (sardine-prede) ma invece si osservava un aumento di alcune specie voraci (pescecani-predatori). Si trattava di capire come mai l'assenza di pesca durante la guerra avesse favorito lo sviluppo dei predatori e sfavorito quello delle prede. Dal momento che la diminuzione della pesca aveva causato un'aumento dei predatori rispetto alle prede, D'Ancona aveva ipotizzato che l'attività di pesca, entro certi limiti, favorisse lo sviluppo dei pesci-preda e si era rivolto a Volterra per trovare una conferma matematica della sua supposizione.

Per spiegare il fenomeno, Volterra propose un metodo matematico che descriveva le relazioni tra preda e predatore e i cambiamenti subiti dalle rispettive popolazioni nel tempo, dimostrando i suoi famosi risultati sui cicli di tipo preda-predatore ed il cosiddetto principio dell'esclusione competitiva.

Volterra affrontò il problema costruendo il modello matematico che descrive l'evoluzione di due popolazioni conviventi in competizione tra loro, chiamandolo **la matematica della lotta per la vita**.

Sia $x(t)$ il numero delle prede e $y(t)$ il numero dei predatori, seguendo le informazioni fornitegli, Volterra formulò le seguenti ipotesi:

il tasso relativo di crescita delle prede è costante in assenza di predatori ma decresce linearmente in funzione di y , i predatori decrescono ad un tasso costante in assenza di prede ma crescono linearmente con x .

Il modello che ne segue:

$$\begin{cases} \dot{x} \\ x \end{cases} = a - by$$

$$\begin{cases} \dot{y} \\ y \end{cases} = cx - d$$
(43)

dove a, b, c, d sono costanti positive.

Il sistema era già stato studiato nel 1920 da Lotka, in relazione a questioni di cinetica chimica, ma l'analisi di Volterra fu più precisa e completa.

Il sistema (43), detto di **Lotka-Volterra**, non è lineare e può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - byx \\ \dot{y} = cxy + dy \end{cases}$$
(44)

L'analisi del sistema (43), dovuta agli studi di Volterra va oltre gli obiettivi di queste note. Si infatti tratta di un sistema di equazioni differenziali non lineari che non si risolve esplicitamente ma di cui si può solo stabilire l'andamento qualitativo della soluzione. In particolare dalla forma del sistema è possibile ricavare una relazione fra x e y e stabilire alcune proprietà delle soluzioni. Dal fatto che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx - d)}{x(a - by)}$$

si ottiene

$$\left(\frac{a}{y} - b\right)dy = \left(c - \frac{d}{x}\right)dx$$

ed integrando, si vede che esiste una costante K tale che

$$a \log y(t) - by(t) - cx(t) + d \log x(t) = K$$
(45)

Si può dimostrare che i grafici delle soluzioni $(x(t), y(t))$ rappresentano curve chiuse, regolari e contengono il punto $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Il punto $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ è detto *di equilibrio* e corrisponde alla soluzione costante $(x(t), y(t)) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Si ha inoltre che l'evoluzione numerata della coppia $(x(t), y(t))$ è periodica con un periodo che dipende dalla costante K in (45). Inoltre, si prova che

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} \\ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{d}{c} \end{cases}$$
(46)

Le formule (46) indicano che le coordinate del punto di equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ hanno anche un significato di numero medio degli individui nell'arco di un periodo e questi valori medi sono comuni a tutte le orbite.

È interessante notare che se si aumenta il tasso di crescita di x , invece di a si ha $a + \epsilon$ e si riduce il tasso di crescita di y , che passa da d a $d - \eta$, lasciando inalterati i coefficienti b e c di iterazione tra le specie, i numeri in (46) diventano $\frac{a + \epsilon}{b}$ per i predatori, che registrano un aumento medio e $\frac{d - \eta}{c}$ per le prede, che registrano una diminuzione media.

Le proprietà dimostrate per le soluzioni sono note come **Principio di Volterra**, e rappresentano le tre leggi che regolano l'evoluzione delle due popolazioni.

- La prima legge stabilisce che le densità delle due popolazioni hanno un andamento ciclico ovvero dopo un intervallo di tempo riassumono gli stessi valori.
- La seconda legge è contenuta in (46) e asserisce che le medie in un periodo non dipendono dai valori iniziali.
- La terza legge conclude che un prelievo indiscriminato delle due popolazioni, come avviene per la pesca, provoca un aumento del numeri di prede ed una diminuzione del numero dei predatori.

Un applicazione importante di tale principio è stata quella associata all'uso degli insetticida in agricoltura. Basti pensare ad un ecosistema composto di due specie: insetti fitofagi ed insetti entomofagi che si nutrono dei primi. Il risultato di Volterra suggerisce che il ricorso insetticida può essere controproducente, infatti distruggendo indiscriminatamente insetti preda e predatori, provoca un incremento delle prede che sono appunto gli insetti nocivi ed una diminuzione dei benefici dei predatori.

Ad esempio, nel 1968 venne casualmente introdotto dall'Australia in California un insetto *Icerya Purchasi*, che distrusse in poco tempo un enorme quantità di coltivazioni di agrumi. Venne allora introdotta una coccinella, predatrice dell'*Icerya*, il *Novius Cardinalis*, che ridusse gli insetti nocivi ad un livello più basso. La scoperta dell'insetticida DDT, ora proibito perchè risultato cancerogeno, indusse molti agricoltori a tentare la distruzione completa dell'*Icerya*, ma seguendo le leggi di Volterra, la distruzione della coccinella predatrice provocò un aumento dell'insetti nocivi.

Vale la pena completare la bibliografia di Vito Volterra, che non è stato solo un ricercatore di grande talento ma anche un politico attivo, nel 1905 divenne

infatti il piú giovane senatore del Regno d'Italia. Fautore di idee progressiste si oppose strenuamente al fascismo, e fu l'unico senatore nel 1922 a votare contro il trasferimento dei poteri a Mussolini. Volterra morí nel 1940 e la sua vita rappresnta un esempio di onestá e di principi morali nella vita politica

Epidemia di tipo SIR

Supponiamo di essere in presenza di una malattia infettiva immunizzante, nel senso che i malati o muoiono o diventano immuni e non ritornano suscettibili alla malattia. Malattie di questo tipo sono il morbillo, la peste e l'AIDS.

In questo caso la popolazione viene divisa in tre classi: i suscettibili, gli infetti ed i rimossi, in quanto guariti o morti.

Indichiamo con $m = m(t)$ i malati e con $s = s(t)$ i suscettibili, cioè sani ma soggetti al contagio. Si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = am(t)s(t) - bm(t) \\ \dot{s}(t) = -am(t)s(t) \end{cases} \quad (47)$$

dove la costante a rappresenta la contagiositá dell'infezione e b non solo il tasso di guarigione ma anche la letalitá della malattia.

come nel modello preda-predatore di volterra, anche questo sistema non si integra esplicitamente, ma si riescono a dare gli andamenti qualitativi delle soluzioni in funzione dei parametri a e b .

Osserviamo che $m(t) = 0$ e $s(t) = 0$, per ogni t sono soluzioni del sistema.

Si puó dimostrare che $\dot{s}(t) < 0$ e quindi il numero dei suscettibili diminuisce con l'aumnetre del tempo.

Il modello puó essere perfezionato introducendo come altra incognita i rimossi

$$r(t) = N_{tot} - m(t) - s(t).$$

in questo caso il sistem diventa:

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = a m(t) s(t) - b m(t) \\ \dot{s}(t) = -a m(t) s(t) \\ \dot{r}(t) = \nu m(t) \end{cases} \quad (48)$$

dove ν rappresenta il tasso di decadimento della malattia.

L'analisi qualitativa delle soluzioni di questo sistema mostra che se il numero iniziale s_0 è minore di $\frac{\nu}{a}$ il numero di individui infettivi decresce fino all'estinzione della malattia.

Se invece il numero iniziale dei suscettibili $s_0 > \frac{\nu}{a}$ allora il numero di individui infettivi inizialmente cresce (si innesca cioè una epidemia), raggiunge un massimo e poi, quando la popolazione suscettibile è stata sufficientemente ridimensionata, l'epidemia si attenua fino all'estinzione della malattia.

Conclusioni

Nel Seicento, Galileo aveva detto **La Natura è scritta con il linguaggio della Matematica** ed inoltre **Una disciplina ha tanto più la dignità della scienza quanto più fa uso dello strumento matematico** e molti secoli dopo Volterra aveva cercato di costruire una sorta di meccanica analitica dei fenomeni biologici, credendo che, dopo la completa matematizzazione della fisica avvenuta nei secoli precedenti, ci sarebbe dovuta essere quella della biologia.

Tuttavia mentre negli ultimi venti anni l'applicazione della matematica a problemi non di natura fisica, come le scienze sociali ed economiche, una notevole accelerazione, lo sviluppo della biomatematica è stato più lento. e le scienze biologiche rimangono ancora una scienza prevalentemente sperimentale

Vale la pena osservare che Eduardo Boncinelli, uno dei più noti biologi italiani contemporanei, osserva che, sebbene vi siano campi della scienza della vita per i quali la matematica sembra fatta apposta, quali la dinamica delle popolazioni e la recente scoperta enumeratedella struttura matematica a doppia elica del DNA, sembra che le attuali conoscenze e le teorie matematiche sembrano incomplete per interpretare in modo soddisfacente alcuni comportamenti, fenomeni ed evoluzioni di tipo biologico.

È possibile che sia necessario scoprire nuove branche della matematica da essere con successo applicate alla biologia, come negli ultimi anni la teoria dei frattali è diventata il nuovo e potente strumento di interpretazione in ambito geologico.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografia sulla biomatematica e la dinamica delle popolazioni è molto vasta. La bibliografia che segue è relativa ad alcuni testi consultati durante la preparazione di questa breve note.

- E. Bateschelet, Introduzione alla Matematica per biologi, Ed. Piccin, 1979.
- E. Boncinelli-U. Bottazzini, La serva padrona, Raffaello Cortina Ed., 2000.
- Bottazzini U., Storia della Matematica Moderna e Contemporanea, UTET, 1978.
- V. Comincioli, Problemi e Modelli matematici nelle Scienze applicate, Casa Ed. Ambrosiana, Ultima Edizione, 1997.
- E. Giust, Elementi di Analisi Matematica, Bollati-Boringhieri, 2008
- G. Israel, Modelli Matematici: Introduzione Elementare ai Problemi di Matematica Applicata, Editori Riuniti, 1986.
- P. Marcellini- C. Sbordone, Elementi di Calcolo, Liguori Edizioni, 2004.
- C.D. Pagani-S.Salsa, Analisi Matematica, Vol. 2, Ed Masson, Milano, 1993.