

Funzioni elementari e fenomeni “complessi” in biologia

dove si parla di foglie di mais, rose,
cocomeri, neuroni, rane, delfini, insetti
giganti, batteri, infezioni, papirie
zebre bianche



Elvira Mascolo
Università di Firenze

Galileo Galilei e Charles Darwin

**La natura è scritta con il linguaggio della
matematica**

**.....coloro che conoscono e comprendono i
principi della matematica sembrano avere
un sesto senso per la ricerca
biologica.....**

Metodo Scientifico

Dimostrazioni CERTE devono
accompagnare **SENSATE** esperienze

**Uso di tecnologie avanzate e di
Indirizzi e strumenti matematici**

Modello Matematico

**Fattori principali che caratterizzano
il fenomeno**

**Stabilire delle relazioni tra le quantità che
sono essenziali per la descrizione del
fenomeno**

Quantificare tali relazioni

Modello Matematico

descrittivo: sintetizza le informazioni disponibili senza cercare di spiegare il meccanismo

interpretativo: formula alcune ipotesi e stabilisce le conseguenze logiche.

predittivo: tenta di conoscere la risposta del sistema i cui effetti non possono o non devono essere osservati direttamente.

Modelli **deterministici**

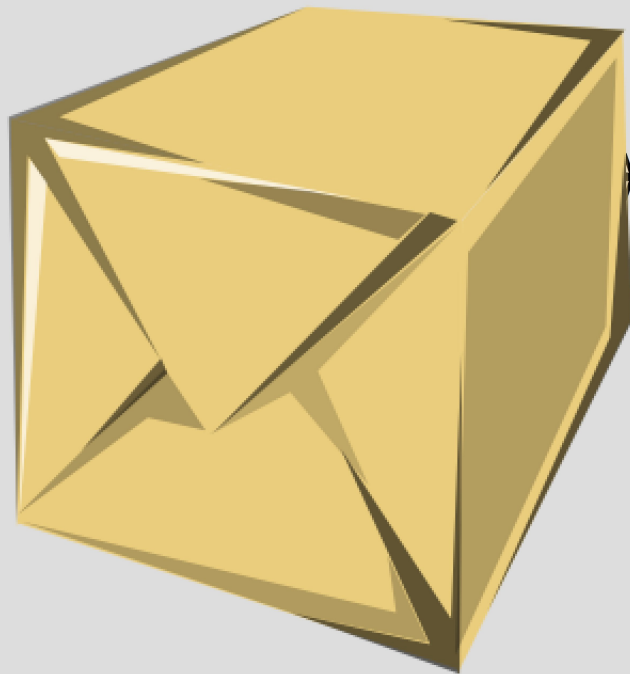
Modelli **stocastici**

Definizione di funzione

$$f: A \rightarrow B$$

$$f: x \rightarrow f(x) \text{ (UNICO)}$$

$x \rightarrow$



$\rightarrow f(x)$

**“Scatola
Magica”**

Leggi di associazione

Codice fiscale, targa, madre-figlio (!!!!!)

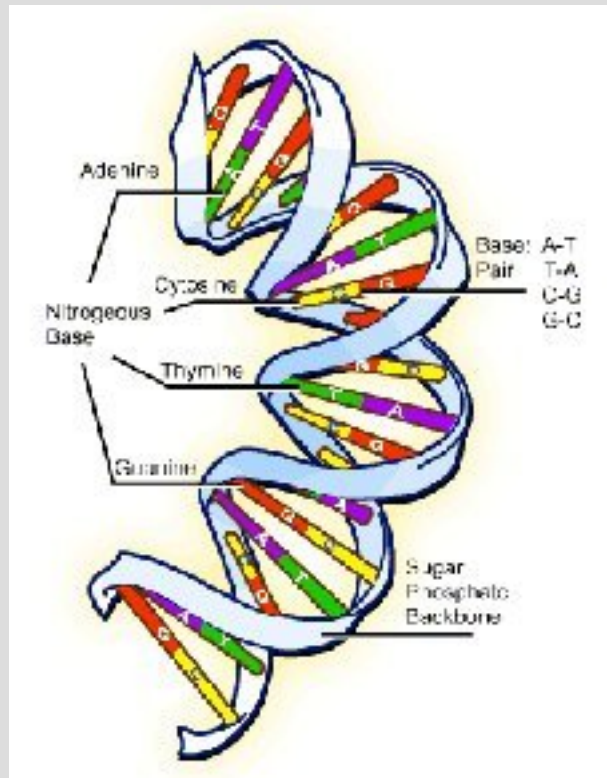
- Prezzo unitario litro benzina p e L il numero litri:

$$\text{Costo} = f(L) = p L \quad (\text{Proporzionalità diretta})$$

- Gas racchiuso in un contenitore di volume V a temperatura costante

$$\text{Pressione} = P(V) = K/V \quad (\text{Proporzionalità inversa})$$

La funzione del DNA



I due filamenti del DNA sono tenuti insieme da legami idrogeno tra coppie di basi

$$f : \{A, C, G, T\} \rightarrow \{A, C, G, T\}$$

La funzione del DNA

La funzione che associa ad ogni sequenza su un filamento la corrispondente sull'altro:

$$f(A)=T \quad f(T)=A$$

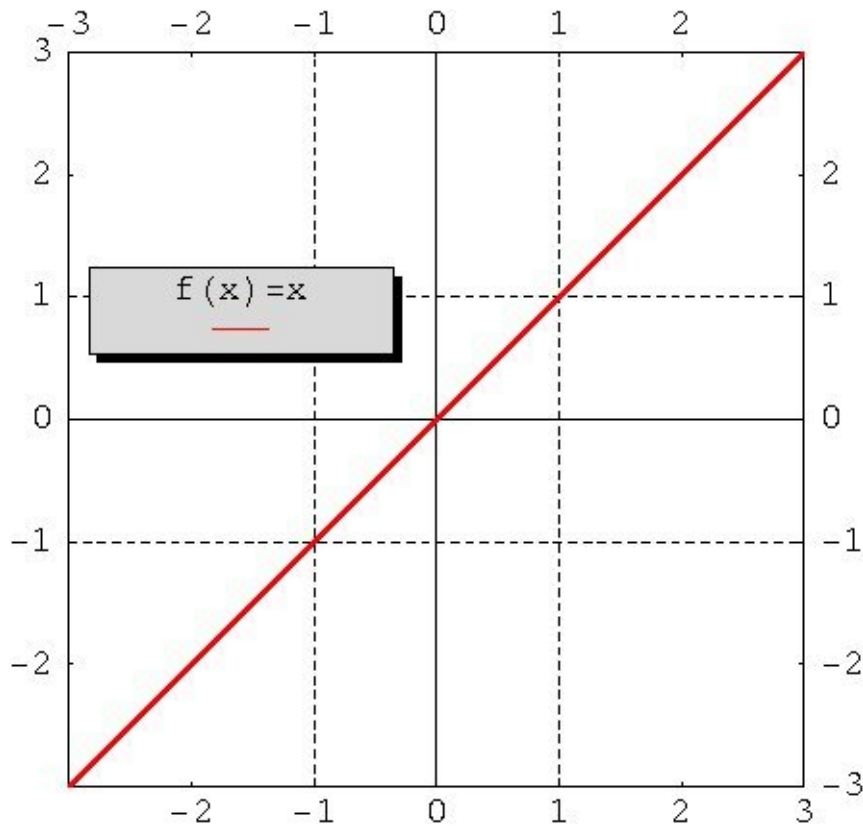
$$f(C)=G \quad f(G)=C$$

e

$$f(\text{CGGGATGCGGGAATGGGAA})=$$

GCCCTACGCCCTTACCCTT

Leggi Lineari: $f(x) = ax$



Nelle specie animali la velocità di crescita è legata all'età

$$v(t) = k t$$

k costante che dipende dalla specie (uomo $k=0,5$)

Non tutti gli organi crescono nello stesso rapporto

Assorbimento del potassio in una foglia di mais



$f(t)$ quantità di potassio nel tempo t

$$f(t) = a t$$

- $a = 1,8$ microgrammolecole per unità di peso per ora al buio
- $a = 4$ microgrammolecole al buio per unità di peso per ora alla luce

**importanza del fattore luce:
RADDOPPIA**

Dimensioni di una foglie di rosa

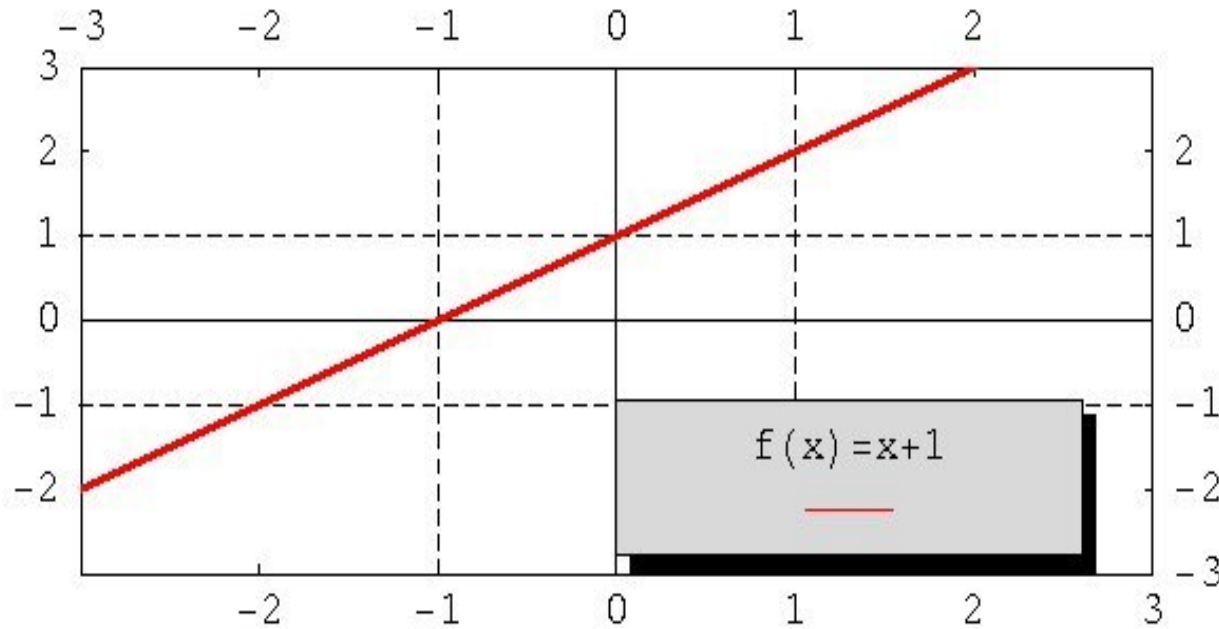
Dalla tabella con le lunghezze di una foglia di rosa stabilisce che

Lunghezza = **0.7** Larghezza

Larghezza=**1.3** Lunghezza

Le cellule aumentano in numero uniforme in tutte le direzioni

Relazione Scala Centigrada C e scala Fahrenheit F



$$(F-32): C = 180 : 100 = 1,8$$

$$F(C) = 1.8 C + 32$$

$$C(F) = \frac{F - 32}{1,8}$$

Germinazione di una varietà sperimentale di cocomero

**$G(T)$ = percentuale di semi che germinano alla
temperatura T**

$$15 \leq T \leq 30 \Rightarrow G(T) = aT + b$$

$$30 \leq T \leq 35 \Rightarrow G(T) = c$$

$$35 \leq T \leq 40 \Rightarrow G(T) = pT + q$$

Funzioni a tratti

I dati sperimentali determinano una relazione funzionale che permette di prevedere a che temperatura ad esempio germina il 50% dei semi

Le temperature T **minori o uguali a 15** e **maggiori o uguali a 40** impediscono alle piante di germinare
La funzione relativa a questo fenomeno è definita **a tratti**

Neuroni

Neuroni: unità fondamentali del sistema nervoso

**Cellule di dimensione variabili tra i 4 ed i 100 micron
(millesimi di millimetro)**

**Neuroni artificiali: schematizzazione dei neuroni biologici si
descrivono attraverso una variabile che assume
solo i valori 0 e 1.**

Neuroni artificiali

$y=0$ corrisponde allo stato **inibito**
 $y=1$ corrisponde allo stato **eccitato**

il più semplice modello di neurone consiste nel far dipendere lo stato di y dal segnale x

$x < 0$ neurone rimane inibito $y=0$
 $x > 0$ neurone passa allo stato $y=1$

La funzione di Heaviside

Funzioni razionali $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

La velocità con cui un muscolo della coscia di una rana si estende per sollevare un peso p

$$v(p) = 0,95 \frac{70 - p}{p + 12}$$

Il peso $p > 0$ ed è diverso da -12



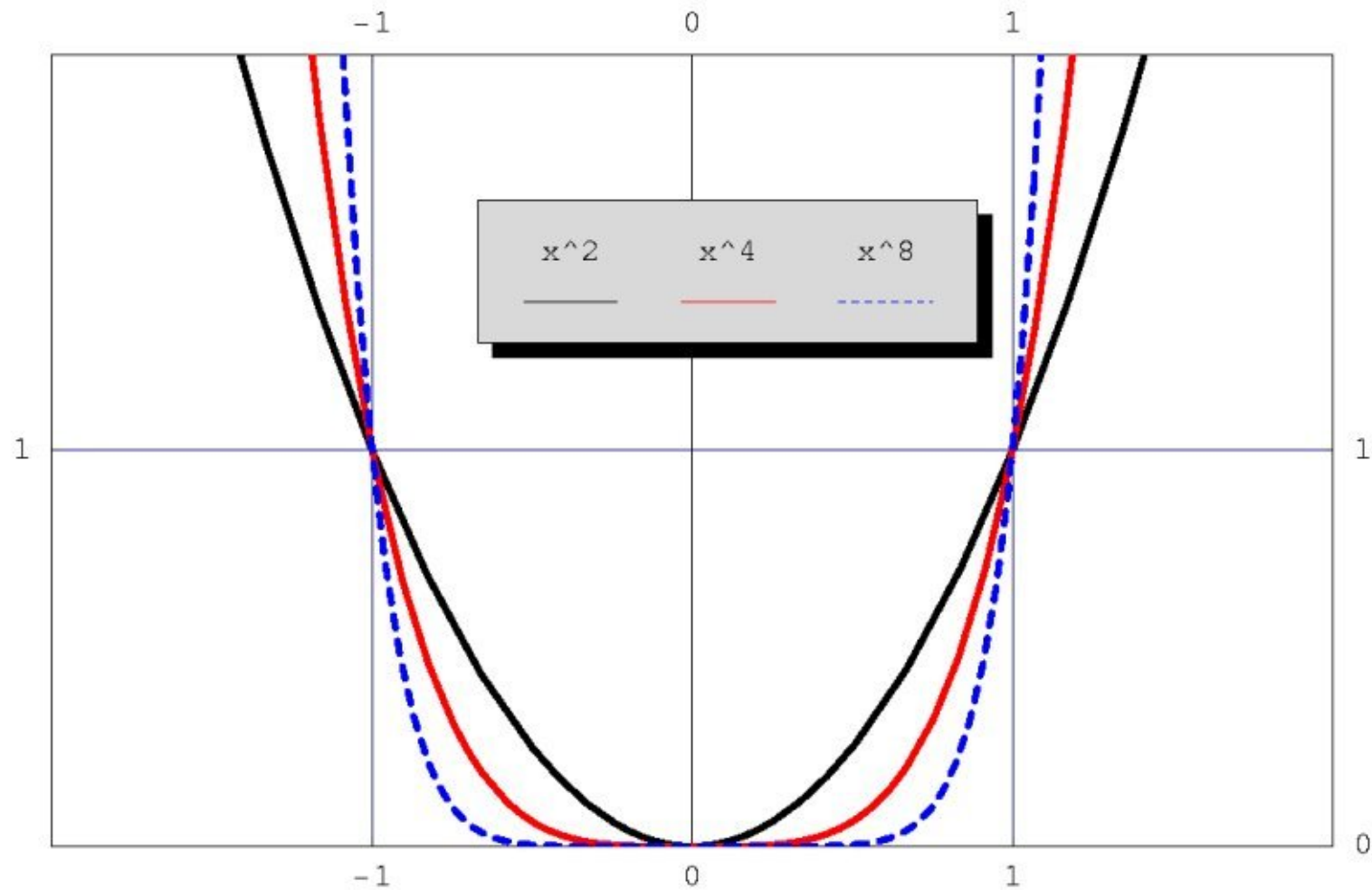
Povera rana.....

La massima velocità di estensione si ottiene per
 $p=0$ (nessun peso)

$v(0)$ è circa 5,54

$v(70)=0$ non può sollevare un peso
maggiore o uguale a 70

Leggi quadratiche e.....



Il centro di gravità di un animale che salta (pulce, gatto, delfino..) è soggetto alla stessa accelerazione

di gravità

$$g = 981 \text{ cm/s}^2$$

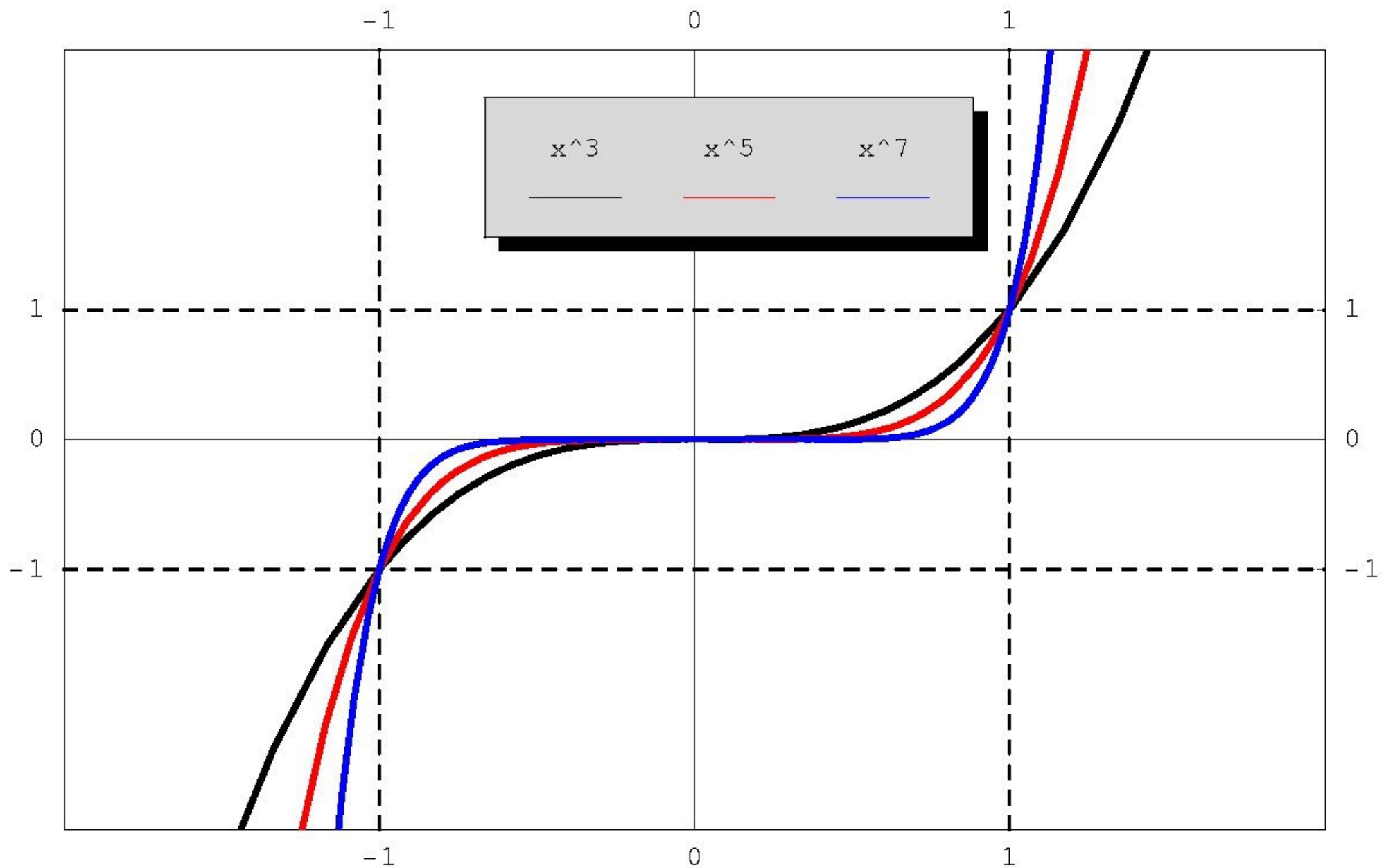
(legge di Galileo)

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

Qualunque sia il movimento del delfino il centro di gravità descrive una parabola



Funzioni potenza n-sima dispari



Applicazioni delle funzioni potenza

essere unicellulare di forma sferica di raggio r

$S = \text{superficie} = 4 \pi r^2$ (funzione quadrato)

$V = \text{volume} = \frac{4}{3} \pi r^3$ (funzione cubica)

$r < 1$, superficie $>$ volume $r^3 < r^2$

$r > 1$ superficie $<$ volume $r^2 < r^3$

Se la cellula è di piccole dimensioni la superficie è più grande del volume

Piante e animali di forma complessa

Si introduce la **dimensione lineare d**:

$$S \sim (\text{costante}) d^2$$

$$V \sim (\text{costante}) d^3$$

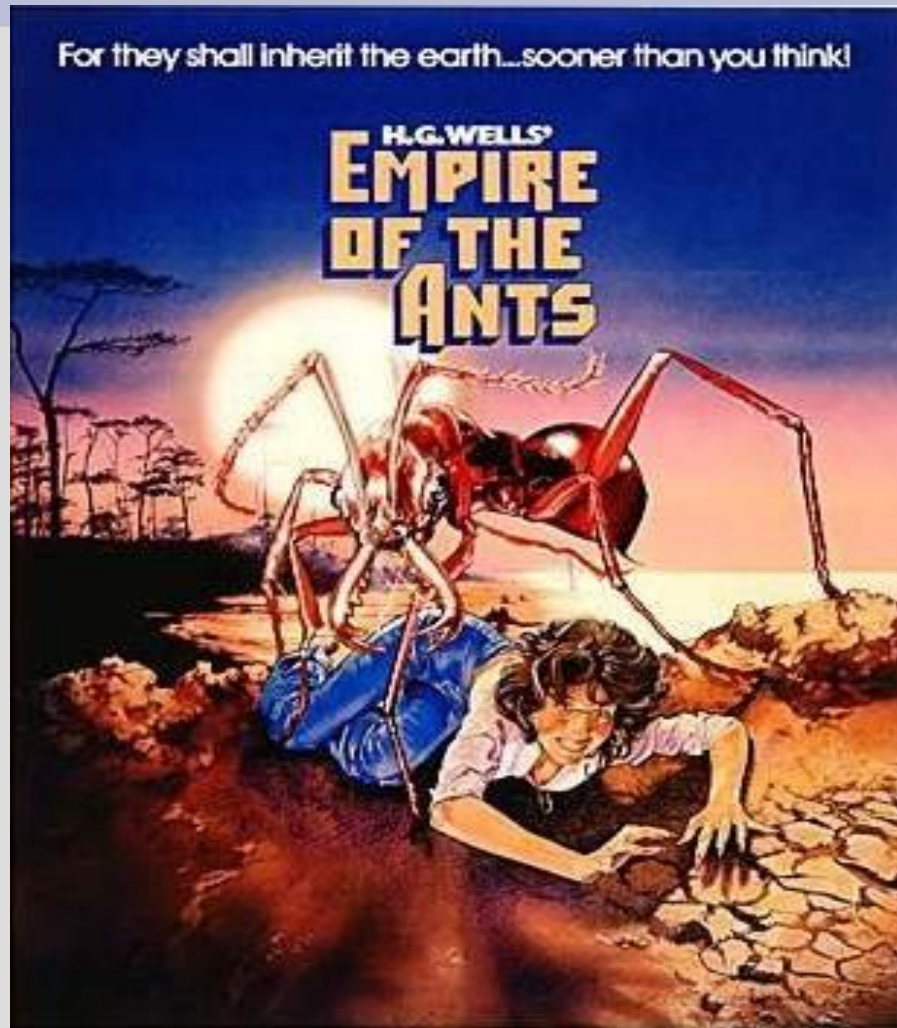
Fenomeni di scambio con l'esterno come l'assorbimento ossigeno, la dissipazione calore,.. avvengono attraverso la superficie $\sim d^2$

Fenomeni metabolici come il consumo di ossigeno, la produzione di calore... dipendono dal volume $\sim d^3$

Perché non possono esistere insetti giganti e i lillipuziani

Non è possibile variare eccessivamente le dimensioni di una specie animale senza danneggiare l'equilibrio tra il metabolismo interno e l'ambiente esterno che le permette di vivere

animale di dimensioni 10 volte più grande.



Samuel Z. Arkoff presents "EMPIRE OF THE ANTS" released by American International Pictures
starring JOAN COLLINS · ROBERT LANSING · JOHN DAVID CARSON
ROBERT PINE · EDWARD POWER · ALBERT SALMI · JACQUELINE SCOTT · PAMELA SHOOP
executive producer · screenplay by · screen story by · based on the · directed by · produced by
SAMUEL Z. ARKOFF · JACK TURLEY · BERT I. GORDON · story by H.G. WELLS · BERT I. GORDON · BERT I. GORDON
cast by Maxwell · a cinema 77 film · Closed captioning by Tempus Fines · Independent by Videomatic

Geometria e forma analoga

Il volume è cresciuto di

$$10^3 = 1000$$

La superficie (anche degli organi interni) solo di

$$10^2 = 100$$

**Ricambio di gas
riassorbimento del cibo
non sono sufficienti**

animale di dimensioni ridotte di 10^{-1}

La superficie si è ridotta di 10^{-2} il volume di 10^{-3} come il metabolismo.

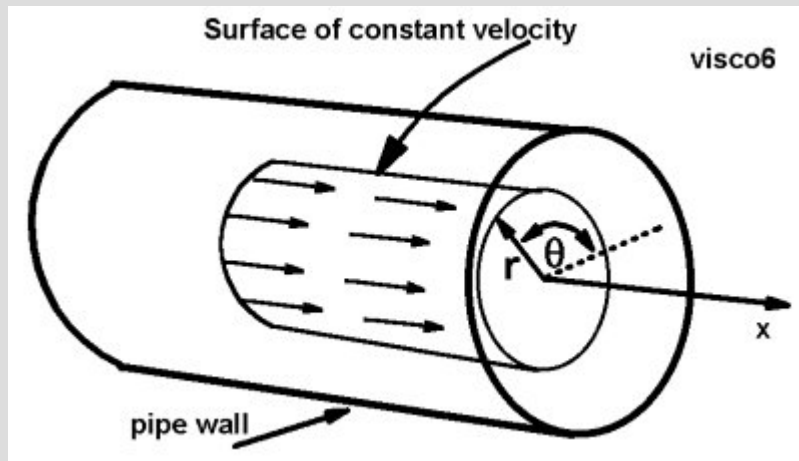
Non riesce a compensare la perdita di calore che è proporzionale alla superficie

Il popolo dei lillipuziani non può sopravvivere



Flusso di sangue in un vaso sanguigno

Legge determinata in modo
sperimentale da J.L. Poiseuille
(1799-1862)



r = distanza di un punto del liquido dall'asse centrale del tubo

R = raggio del cerchio sezione trasversale

$$v = v(r), 0 \leq r \leq R$$

$$v(r) = \frac{P}{4bL} (R^2 - r^2)$$

L= Lunghezza del tubo, P=differenza di pressione
b= viscosità del liquido, v=velocità

v è massima lungo l'asse centrale del vaso, $r= 0$
v= 0 se **r= R**, alla parete del vaso

- se **v** non eccede un valore critico il flusso è **laminare** tutte le particelle del liquido si muovono parallele al tubo e la velocità **v** aumenta partendo da zero
- se la velocità supera il valore critico (vaso ostruito) il flusso è **turbolento**

Nel caso del sangue in un arteria la velocità massima è 1.185cm sec⁻¹.

Funzione potenza $f(x)=x^\alpha$

Modello di Bertalanffy (circa 1960) per le crescita tumorale

Tasso di crescita della massa

$$T(m)=a m^\alpha - b m^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$

elementi funzionali di un organismo funzionano con processi continui di iterazione

modello di accrescimento e decadimento attraverso funzioni potenza

Dare un significato a $f(x)=x^\alpha$

$\alpha > 0$ è un numero reale e $x > 0$

- α è naturale OK
- α è un razionale $\alpha = m/n$: $x^\alpha = \sqrt[n]{x^m}$
- α è un numero irrazionale: $\sqrt{2}$, π

Fenomeni della dinamica delle popolazioni e dei ritmi biologici

Popolazione di cellule in un ambiente ideale

Ogni cellula si riproduce sdoppiandosi dopo un intervallo di tempo tempo t_0 .

$N_0=N(0)$ =numero popolazione all'istante iniziale

$$N(t_0) = 2 N_0,$$

$$N(2t_0) = 2 N(t_0) = 2 (2 N_0) = 4 N_0 = 2^2 N_0$$

$$N(n t_0) = 2^n N_0$$

Successioni

Una successione è una funzione definita nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali

$$f : n \rightarrow f(n) = 2^n N_0$$

Evoluzione temporale di fenomeni fisici, chimici, biologici, demografici, economici effettuando le rilevazioni

in intervalli di tempo fissati

(TEMPO DISCRETO)

Crescita di un gattino



peso iniziale= w

percentuale di
crescita= p

$$P(0)=w$$

$$P(1)= w(1+p/100)$$

$$P(2)=w(1+p/100)^2$$

$$P(3)=w(1+p/100)^3$$

$$P(n)= w(1+p/100)^n$$

Funzione esponenziale

Passiamo da intervalli di tempo **discreti** a
“tempi” **continui**:

- **Numero popolazione di cellule**

$$N(t) = N_0 2^t$$

- **Crescita dello “stregatto”**

$$P(t) = w (1 + p/100)^t$$

Funzione esponenziale: $f(x) = a^x$, $a > 0$

(varia l'esponente fissata la base)

Funzione Logaritmo

La funzione **inversa** della funzione esponenziale è la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0$$

cosa c'entra il logaritmo con papiri e fossili?

Decadimento radioattivo

- $M(t)$ massa di un isotopo radioattivo.
- $M(0)=M_0$

La legge di decadimento è della forma

$$M(t) = M_0 Q^{-t}, \quad Q > 1$$

La legge di decadimento del ^{14}C

Atomo di carbonio ha 6 protoni ma si presenta in natura in 3 varianti:

^{12}C 6 neutroni ^{13}C 7 neutroni ^{14}C 8 neutroni

- Solo un atomo di carbonio ogni 10^{12} è un ^{14}C
- In un organismo morto il ^{14}C decade e non viene sostituito.

La legge di decadimento del ^{14}C e papiri

Misurando la quantità relativa di ^{14}C si può stabilire l'età di fossili o di reperti

La funzione di decadimento

$$M(t) = M_0 2^{-(t/5730)}$$

Papiro: la quantità di ^{14}C pari a $4/5$ dell'atmosfera che indichiamo con M_0

$$2^{-(t/5730)} = M(t)/M_0 = 4/5$$

$$-(t/5730) = \log_2 (4/5)$$

La legge di decadimento del ^{14}C e i papiri

$$t / 5730 = \log_2 (5/4)$$

(Attenzione:

$$\log_2 (5/4) = - \log_2 (4/5))$$

segue

$$t = 5730 \log_2 (5/4)$$

$$t \sim 1845$$

$$2008 - 1845 = \mathbf{163 \text{ dC}}$$



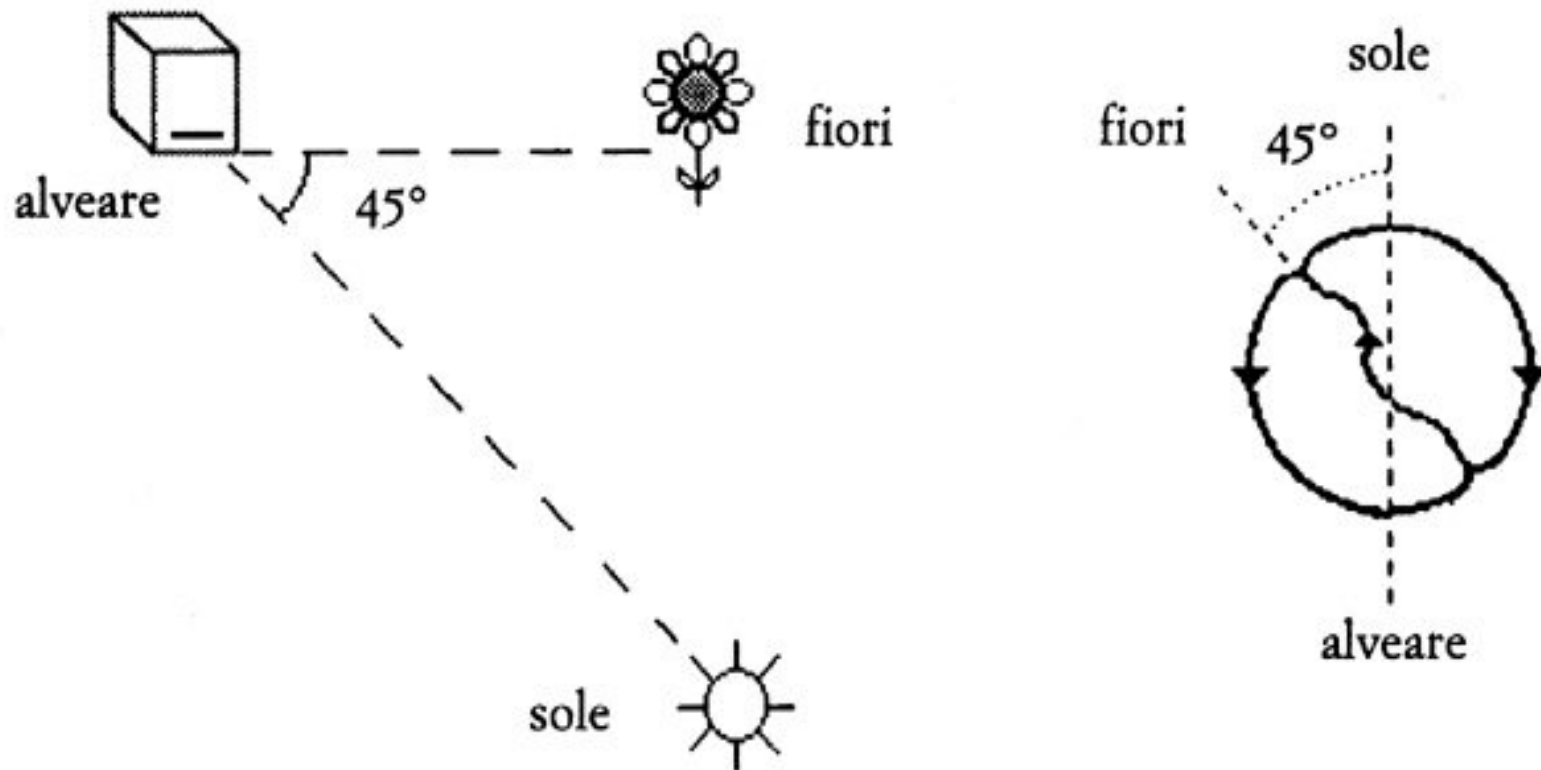
Funzioni periodiche

Ritmi biologici come variazioni stagionali, cicli giornalieri, respirazione battito del cuore sono descritti attraverso le funzioni periodiche:

$$f(x+T) = f(x) , \quad T \text{ periodo}$$

alcuni animali usano gli strumenti di trigonometria: funzioni seno e coseno

Le api usano per la danza le coordinate polari



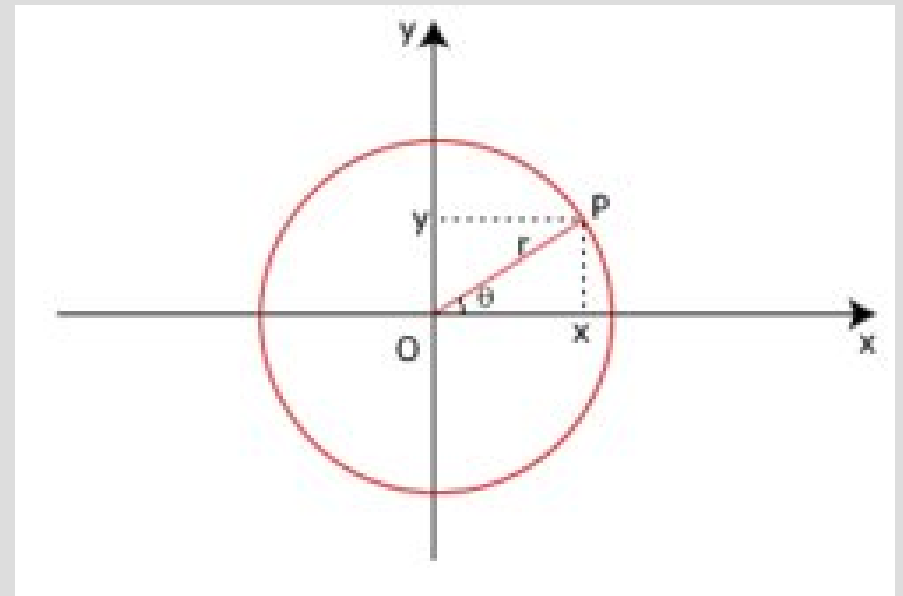
La Danza delle api

Con l'esecuzione di questa danza, **i cui movimenti sono perfettamente codificati**, l'ape operaia può comunicare alle compagne **preziose informazioni sulla direzione e distanza** a cui si trovano fiori, nettare, polline e sorgenti d'acqua

Tale danza è quindi il meccanismo con il quale le api possono reclutare altre api del loro alveare per la raccolta di risorse

Coordinate polari

- un sistema di coordinate bidimensionale nel quale ogni punto del piano è identificato da un angolo e da una distanza da O .
- relazione può essere espressa **solamente tramite le funzioni trigonometriche.**



Esistono le zebre bianche?

Un biologo, uno statistico, un matematico partecipano ad un foto-safari in Africa. Viaggiano nella savana a bordo di una jeep scrutando l'orizzonte con i loro binocoli.

Improvvisamente il biologo, in preda all'agitazione, esclama:

Guardate! C'è un branco di zebre! E in mezzo c'è una zebra bianca! Fantastico! Esistono zebre bianche! Sarò famoso!

Anche se si vedono.....

Lo statistico replica:

**Non è un dato significativo. Noi sappiamo che c'è
soltanto UNA zebra bianca.**

Il matematico, con voce calma, dice:

**In realtà noi sappiamo soltanto che esiste UNA zebra
che è bianca da UN lato**