Miscellanea di problemi
Biennio Scuola Superiore

Silvana Bianchini
Mathesis Firenze

Risolvere un problema significa

- *Superare una difficoltà*
- *Raggiungere uno scopo non immediatamente raggiungibile*
- *Abituarsi a pensare, a riflettere, a ragionare*
- *Far lavorare la mente*

- **E’ questo un “abito di comportamento” utile per i nostri allievi**

Occorre attirare l’attenzione dei ragazzi alla disciplina e coinvolgerli

Far vedere loro che la matematica :

- ha una storia, una letteratura
- si ritrova nella natura, nell’arte
- può divertire

Questionario

- per capire la personalità del ragazzo

- per conoscere le motivazioni sulla scelta del tipo di scuola

- per scoprire atteggiamenti nei confronti della matematica

Tra le varie domande

- ***La matematica è solo tecnica o può avere qualche legame con l'arte*?**

Tutti rispondono: "è solo calcolo"

- ***Che cosa chiedi all'insegnante di matematica*?**

Alcuni rispondono di aver pazienza, di rispiegare, di fare più esercizi possibili;

Altri di fare tutto ciò che non sia matematica, perché la matematica è noiosa, insopportabile, incomprensibile

Raccolta di problemi per determinate situazioni del quotidiano scolastico

scelti opportunamente:

- per motivare gli studenti allo studio della matematica
- per insegnare loro ad apprezzarla

Matematica divulgativa

Uccelli in libertà,dal libro“L’uomo che sapeva contare”, di Malbo Tahan

“E, fissando gelidamente Beremiz, indicò la grande voliera e chiese: “ Dimmi un po’ calcolatore dei miei stivali, quanti uccelli ci sono in questa gabbia ?”

Beremiz incrociò le braccia e si mise a osservare i numerosissimi uccelli con grande concentrazione. Era follia, pensavo, tentare di contare gli uccelli che volavano senza posa, saettando da un ramo all’altro.

Ci fu un silenzio pieno di attesa. Dopo qualche secondo, l’uomo che contava si rivolse al buon Iezid dicendo:” Ti imploro, o sceicco, libera immediatamente tre di questi uccelli; così sarà per me assai più semplice e piacevole annunciare il loro numero complessivo.”

Sembrava una richiesta insensata. [..]
"E ora, in questa gabbia" disse Beremiz con grande sicurezza, "ci sono esattamente 496 uccelli". "Sbalorditivo," esclamò entusiasta Iezid. " E' il numero esatto!" [..]
Ma Iezid, incuriosito, si rivolse a Beremiz:
"Potrei sapere per quale motivo hai preferito 496 quando sarebbe stato facilissimo sommarvi tre e dare 499 come risposta ?"
"[..] 496 è un numero perfetto e quindi merita la nostra preferenza." [..]

"Cosa è che rende perfetto un numero?"
"Un numero è perfetto quando esso è uguale alla somma dei suoi divisori escluso il numero stesso.

Per esempio, il numero 28 ha cinque divisori: 1,2,4,7,14.
*La somma di questi divisori:**1+2+4+7+14**, **fa esattamente 28**."*

I numeri non sono indistinguibili l’uno dall’altro, ma assumono una veste particolare che ha origine dalle proprietà di cui godono

Attività

- Stimolare gli studenti a compiere considerazioni personali
- Scoprire altri numeri speciali:

  1729 è il più piccolo numero esprimibile come somma di due cubi in due modi

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3$$

Attività

- Invitare i ragazzi a scrivere il primo numero perfetto

- Verificare che 496 è numero perfetto

- Quale sarà il prossimo numero perfetto? E quale la legge che li genera?

- **Proposizione 36 del IX libro degli Elementi di Euclide**

“Se, a partire dall’unità, si prende un numero a piacere di numeri successivamente proporzionali in ragione doppia, sino a che la loro somma sia un numero primo, il prodotto di tale somma per l’ultimo numero sarà un numero perfetto”

Algoritmo di Euclide

- Se consideriamo ad esempio la sequenza di numeri 1,2,4,8,16, ciascuno doppio del precedente
- facciamone la somma 1+2+4+8+16 = 31
- verifichiamo che 31 è un numero primo
- moltiplichiamo 31 per l'ultimo numero della sequenza: 16
- otteniamo 31x16=496, che è il terzo numero perfetto dopo il 6 e il 28

IN GENERALE

La somma dei primi n numeri, ciascuno doppio del precedente, equivale a $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots\ldots 2^n = 2^{n+1}-1$

Se $2^{n+1}-1$ è primo, allora $N = 2^n(2^{n+1}-1)$ è numero perfetto

L'algoritmo di Euclide scritto in notazioni attuali: $N=2^n(2^{n+1}-1)$ è perfetto se $2^{n+1}-1$ è numero primo

Calcolo dei numeri perfetti con Excel utilizzando l'algoritmo di Euclide (fase 1)

File Modifica Visualizza Inserisci Formato Strumenti Dati Finestra ?

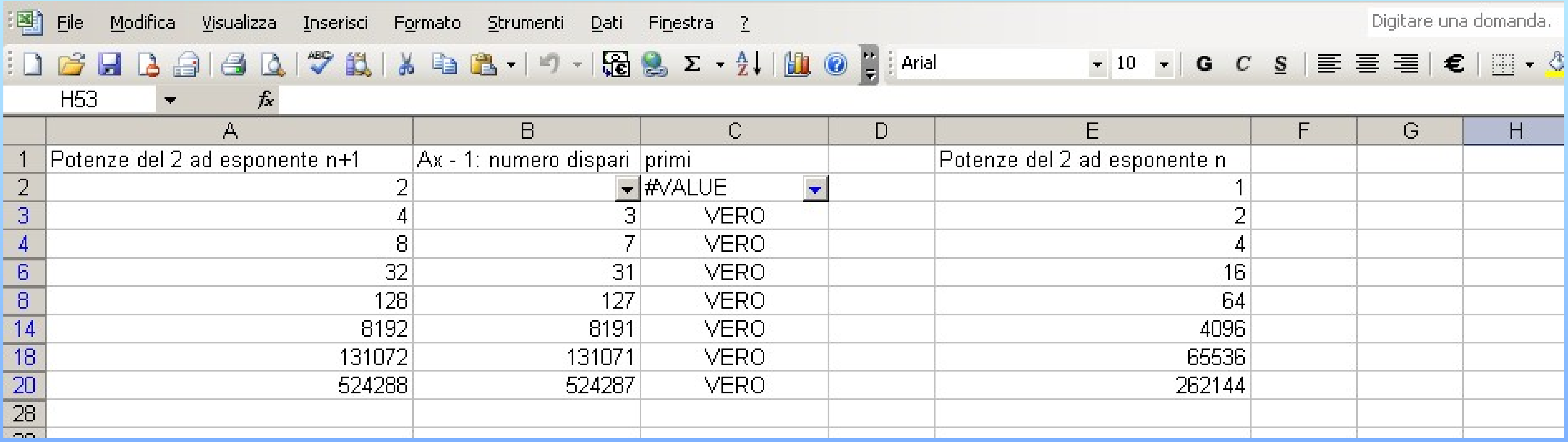
Digitare una domanda.

Arial 10

G35

	A	B	C	D	E	F	G
1	Potenze del 2 ad esponente n+1	Ax - 1: numero dispari	primi		Potenze ad esponente n del 2		
2	2	1	#VALUE		1		
3	4	3	VERO		2		
4	8	7	VERO		4		
5	16	15	FALSO		8		
6	32	31	VERO		16		
7	64	63	FALSO		32		
8	128	127	VERO		64		
9	256	255	FALSO		128		
10	512	511	FALSO		256		
11	1024	1023	FALSO		512		
12	2048	2047	FALSO		1024		
13	4096	4095	FALSO		2048		
14	8192	8191	VERO		4096		
15	16384	16383	FALSO		8192		
16	32768	32767	FALSO		16384		
17	65536	65535	FALSO		32768		
18	131072	131071	VERO		65536		
19	262144	262143	FALSO		131072		
20	524288	524287	VERO		262144		
21	1048576	1048575	FALSO		524288		
22	2097152	2097151	FALSO		1048576		
23	4194304	4194303	FALSO		2097152		
24	8388608	8388607	FALSO		4194304		
25	16777216	16777215	FALSO		8388608		
26	33554432	33554431	FALSO		16777216		
27	67108864	67108863	FALSO		33554432		
28							

Numeri perfetti con Excel (fase 2)



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Potenze del 2 ad esponente n+1	Ax - 1: numero dispari	primi		Potenze del 2 ad esponente n			
2	2		#VALUE		1			
3	4	3	VERO		2			
4	8	7	VERO		4			
6	32	31	VERO		16			
8	128	127	VERO		64			
14	8192	8191	VERO		4096			
18	131072	131071	VERO		65536			
20	524288	524287	VERO		262144			
28								

- Utilizzando il filtro automatico è possibile eliminare nella colonna C le righe che contengono la parola "*falso*"
- Rimangono solo quelle righe che contengono "*vero*" cioè tutti i numeri dispari che sono **primi**:

2^{n+1} -1 : numero primo

Numeri perfetti con Excel (fase 3)

	A	B	C	D	E	F
1	Potenze del 2 ad esponente n+1	Ax - 1: numero dispari	primi	numeri perfetti	Potenze del 2 ad esponente n	
2	2		#VALUE	1	1	
3	4	3	VERO	6	2	
4	8	7	VERO	28	4	
6	32	31	VERO	496	16	
8	128	127	VERO	8128	64	
14	8192	8191	VERO	33550336	4096	
18	131072	131071	VERO	8589869056	65536	
20	524288	524287	VERO	137438691328	262144	
28						

L'algoritmo di Euclide:

$N=2^n(2^{n+1}-1)$ è perfetto se $2^{n+1}-1$ è numero primo

Moltiplicando i numeri della colonna B con quelli della colonna E,

si ottengono i numeri perfetti:

6 - 28 - 496 - 8128 - 33550336 - 8589869056 - 137438691328

Si può continuare e scriverne altri

Proprietà dei numeri perfetti

Numeri pari

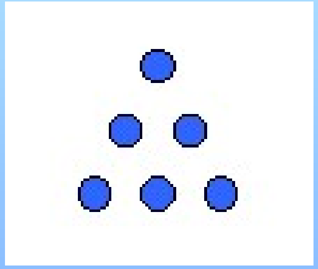
- I numeri perfetti N che ricaviamo dall'algoritmo di Euclide $N=2^n(2^{n+1}-1)$, per come sono espressi, sono necessariamente pari
- Eulero provò che tutti i numeri perfetti pari hanno questa forma
- Nessun numero perfetto dispari è conosciuto
- Si congettura che non esistano numeri perfetti dispari
- Ogni numero perfetto termina con 6 o con 8; può sembrare che ci sia una alternanza.

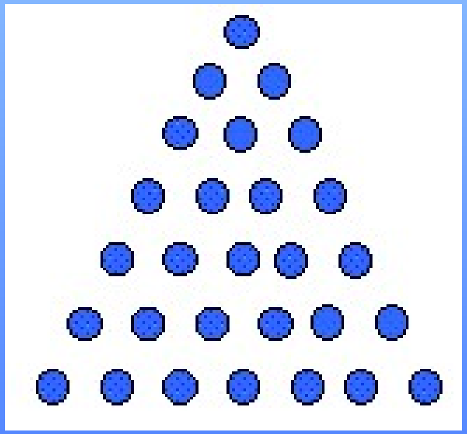
  Non è così: il quinto numero perfetto termina con 6 e pure il successivo **33550336 - 8589869056**

Proprietà dei numeri perfetti

Numeri triangolari

- 6 e 28, primi due numeri perfetti, sono numeri triangolari





- Si dimostra che ogni numero perfetto è un numero triangolare
- Non vale il viceversa

Dimostrazione: ogni numero perfetto è un numero triangolare cioè esprimibile nella forma $\dfrac{k(k+1)}{2}$

$N=2^n(2^{n+1}-1)$ è perfetto se $2^{n+1}-1$ è numero primo

Moltiplicando e dividendo per 2 la relazione $N=2^n(2^{n+1}-1)$

si ha $N = \dfrac{2\cdot 2^n\left(2^{n+1}-1\right)}{2} = \dfrac{2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)}{2} = \dfrac{\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+1}-1+1\right)}{2}$

Chiamando $(2^{n+1}-1)= k$ si ottiene $N = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Ogni numero perfetto è la somma dei primi n numeri naturali primi:

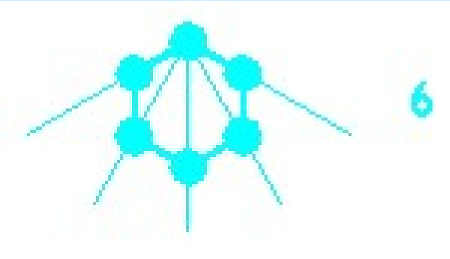
3 è primo → la somma dei primi 3 numeri naturali è un numero perfetto

7 è primo→ la somma dei primi 7 numeri naturali è un numero perfetto

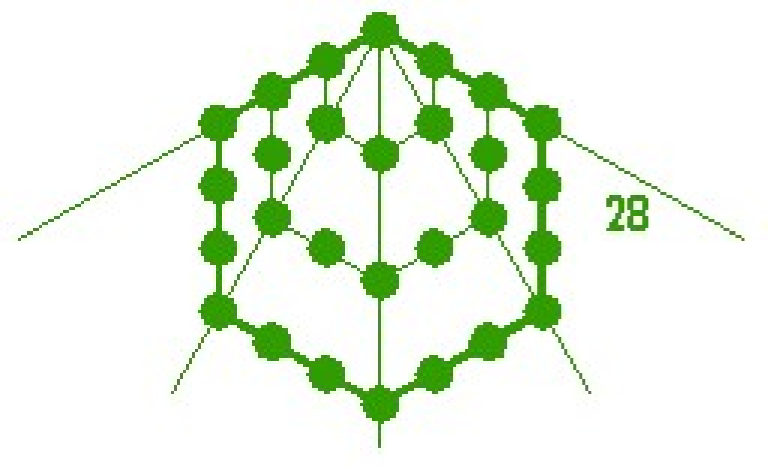
Proprietà dei numeri perfetti

Numeri esagonali

- 6 e 28, primi due numeri perfetti, sono numeri esagonali



- Si dimostra che ogni numero perfetto è numero esagonale



- Non vale il viceversa

Dimostrazione: ogni numero perfetto è un numero esagonale, cioè esprimibile nella forma $2k^2-k$

$N=2^n(2^{n+1}-1)$ è perfetto se $2^{n+1}-1$ è numero primo

Scriviamo la relazione $N=2^n(2^{n+1}-1)$ nella forma

$$2^n(2^{n+1}-1)=2^n(2^n \cdot 2-1) = 2 \cdot 2^{2n} - 2^n$$

Chiamiamo $2^n = k$ e si ottiene $N=2k^2-k$

6 numero perfetto è numero esagonale con k=2

28 numero perfetto è numero esagonale con k=4

496 numero perfetto è numero esagonale con k=16

Proprietà dei numeri perfetti

- 6 è numero perfetto
- I suoi divisori sono 1,2,3,6
- La somma dei reciproci di questi divisori è uguale a 2

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$

In generale si dimostra che

la somma dei reciproci dei divisori di un numero perfetto, incluso il numero stesso, è uguale a 2

Dimostrazione: **la somma dei reciproci dei divisori di un numero perfetto, incluso il numero stesso, è uguale a 2**

I divisori del numero perfetto $N = 2^n(2^{n+1} - 1)$ sono:

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\ldots 2^n, 2^{n+1}-1, 2\cdot(2^{n+1}-1), 2^2\cdot(2^{n+1}-1), 2^3\cdot(2^{n+1}-1), 2^4\cdot(2^{n+1}-1)\ldots\ldots, 2^n(2^{n+1}-1).$

Se consideriamo i reciproci dei divisori ed effettuiamo la somma di questi si ottiene:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}-1}+\frac{1}{2\cdot(2^{n+1}-1)}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^n(2^{n+1}-1)}=$$

$$1+\frac{2^{n-1}\cdot(2^{n+1}-1)+2^{n-2}\cdot(2^{n+1}-1)\ldots\ldots\ldots(2^{n+1}-1)+2^n+2^{n-1}+2^{n-2}\ldots\ldots 2^2+2+1}{2^n\cdot(2^{n+1}-1)}=$$

$$1+\frac{(2^{n+1}-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots 2^2+2+1)+2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots 2^2+2+1}{2^n(2^{n+1}-1)}=$$ effettuando la

somma delle prime n potenze del 2 $\rightarrow 1+\dfrac{(2^{n+1}-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots 2^2+2+1)+(2^{n+1}-1)}{2^n(2^{n+1}-1)}=$

mettendo in evidenza $\rightarrow 1+\dfrac{(2^{n+1}-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots 2^2+2+1+1)}{2^n(2^{n+1}-1)}=$

effettuando la somma delle prime n potenze del 2 $\rightarrow 1+\dfrac{(2^{n+1}-1)(2^n-1+1)}{2^n(2^{n+1}-1)}\rightarrow$

semplificando $\rightarrow 1+\dfrac{(2^{n+1}-1)2^n}{2^n(2^{n+1}-1)}=2$

Le gare matematiche
Rally Transalpino

- Coinvolge l’intera classe

- L’assenza dell’insegnante di matematica fa sì che gli studenti ne siano gli attori principali

- La risoluzione dei quesiti prevede l’uso di materiale semplice quali il righello, lo spago, le forbici, i fogli colorati e a quadretti, i pennarelli ….

- Si richiede per la risoluzione il possesso degli elementi basilari di geometria e di aritmetica

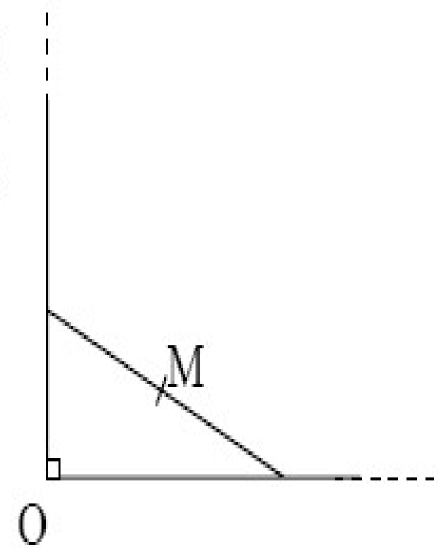
- I ragazzi si scambiano modelli di comportamento utili per i più fragili

Un quesito della II prova
marzo- aprile 2008

16. UNA FIGURA NOTA (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2008 - 16° - II prova

Pietro ha disegnato con la sua squadra un angolo retto di vertice O. Poi ha posizionato il suo righello in modo che le due estremità siano sui due lati dell'angolo. A questo punto segna sul suo foglio la posizione del punto medio M del righello.

Sistemando il suo righello in posizioni diverse, ma sempre con le estremità sui due lati dell'angolo, Pietro osserva che i punti M così tracciati sembrano essere situati su una figura che conosce.

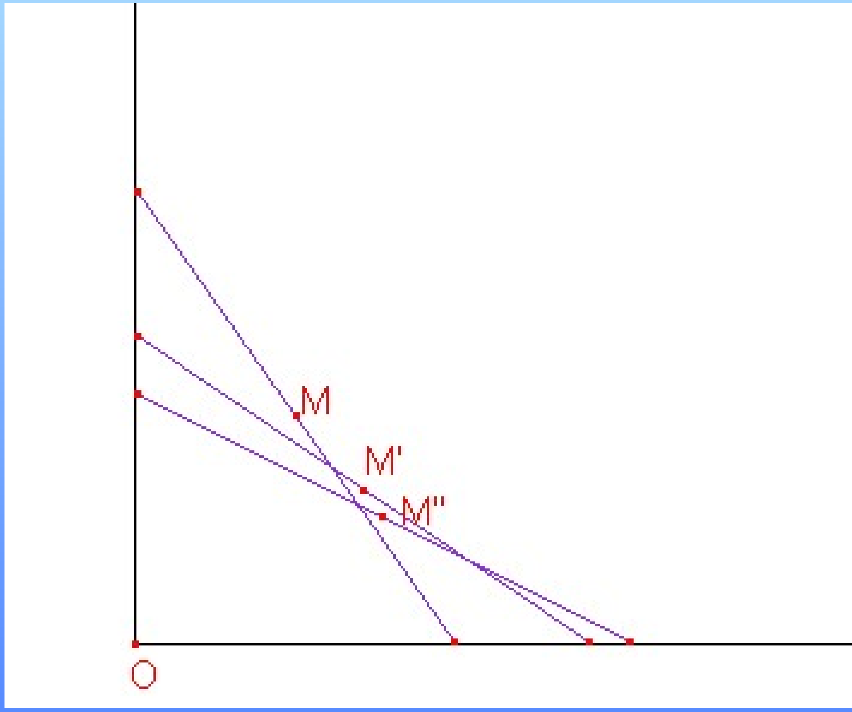


Descrivete questa figura e disegnatela.

Spiegate la vostra risposta.

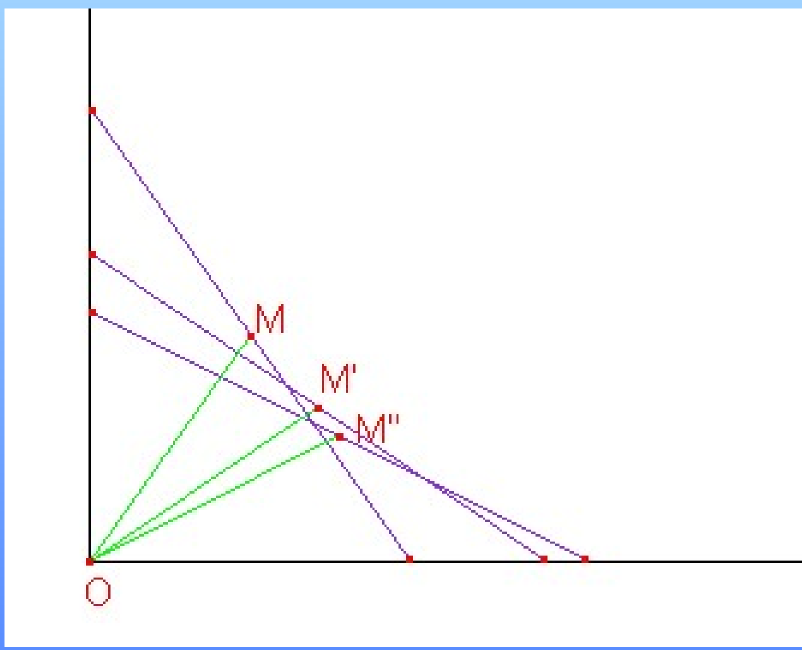
Osservazione comportamento dei ragazzi

- Disegnano un angolo retto di vertice O
- Pongono gli estremi di una sottile striscia di carta con un foro centrale sui lati dell’angolo e segnano sul foglio il punto medio M
- Ripetendo più volte, notano sul foglio la successione dei punti medi M, M’, M”,….che sembrano appartenere ad un arco di circonferenza
- Misurando le distanze di O dai punti M,M’,M”..,constatano che **tali distanze sono uguali**



Si domandano il perché di tale uguaglianza

- Rilevano che la strisciolina di carta altro non è che l'ipotenusa dei vari triangoli rettangoli, costante nel suo spostamento
- Comprendono che le distanze OM, OM', OM''….., rappresentano le lunghezze delle mediane relative all'ipotenusa di quei triangoli
- Verificano che tali distanze sono metà dell'ipotenusa

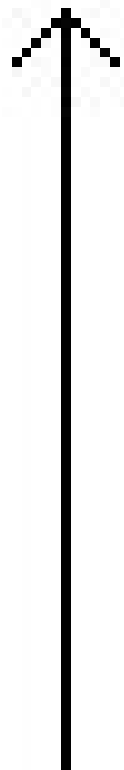


La proposizione

In ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà di essa

Porta alla certezza che:

la proprietà dei punti M,M',M'' … si può estendere a tutti i punti dell'arco disegnato, che, per definizione, risulta un quarto della circonferenza



Matematica e letteratura

“ o se del mezzo cerchio far si puote triangol sì ch’un retto non avesse”

(Paradiso,XIII, 101-102)

- **Sapienza di Salomone**
- **Geometria uno dei campi ritenuti fondamentali insieme alla Fisica, alla Metafisica e alla Logica**
- **Impossibilità di inscrivere in una semicirconferenza un triangolo, avente come lato un diametro , che non sia rettangolo**

Matematica e Cultura

L'Invito a presentare una matematica che tenga conto dell'aspetto culturale ci viene anche dal M.P.I.

Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo.

Ovvero, con i versi di Dante:

….. se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch' un retto non avesse.

(Paradiso, XIII, 101-102) (PNI 2001)

Continuiamo a parlare del cerchio e dei poligoni ad esso inscritti o circoscritti.

Domandiamo:

- Perché un rombo, che non sia un quadrato, è circoscrivibile a una circonferenza, ma non è inscrivibile?
- Perché un rettangolo, che non sia un quadrato, è inscrivibile in una circonferenza, ma non è circoscrivibile?

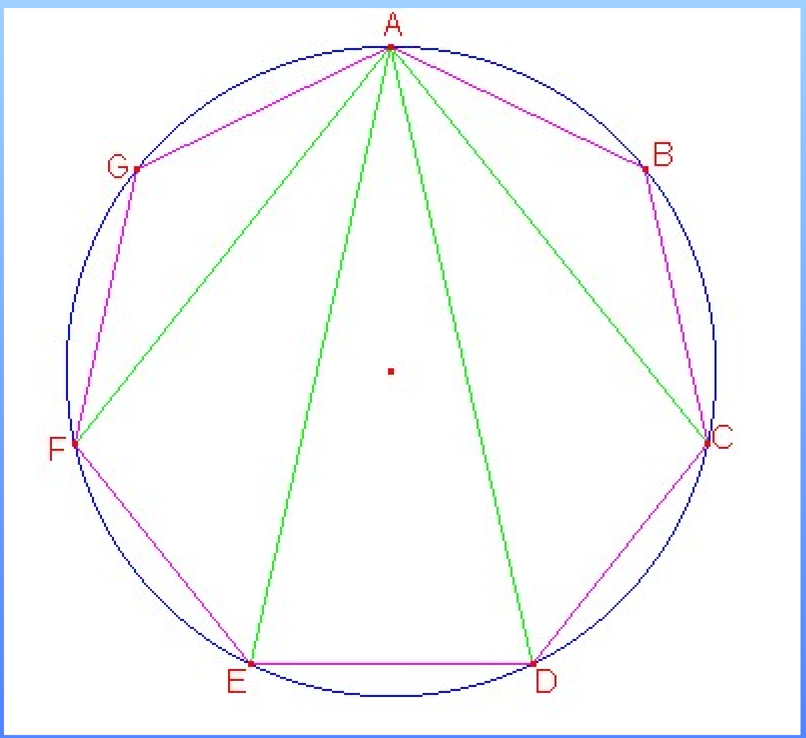
e infine
un quesito più impegnativo che richieda una dimostrazione

La dimostrazione in matematica

- In genere gli studenti neanche tentano di dimostrare; c'è quasi un rifiuto di questa attività
- Forse per stimolarli si può accompagnare il teorema con una traccia "guida" che invogli a provare e aiuti a procedere con minor difficoltà
- Conviene proporre quesiti non complessi

“Dimostra che in un poligono regolare le diagonali che escono da un vertice dividono l’angolo di quel vertice in parti congruenti”

- Se il poligono è regolare allora esiste………….
- Disegno………
- Traccio ………..
- Osservo……
- A corde congruenti …….
- Ad angoli al centro……
  corrispondono ………..
  perché……….
- Quindi ……….. C.D.D



E perché, non invitare il ragazzo a compiere considerazioni personali sulla linea circolare

Commentando il passo:

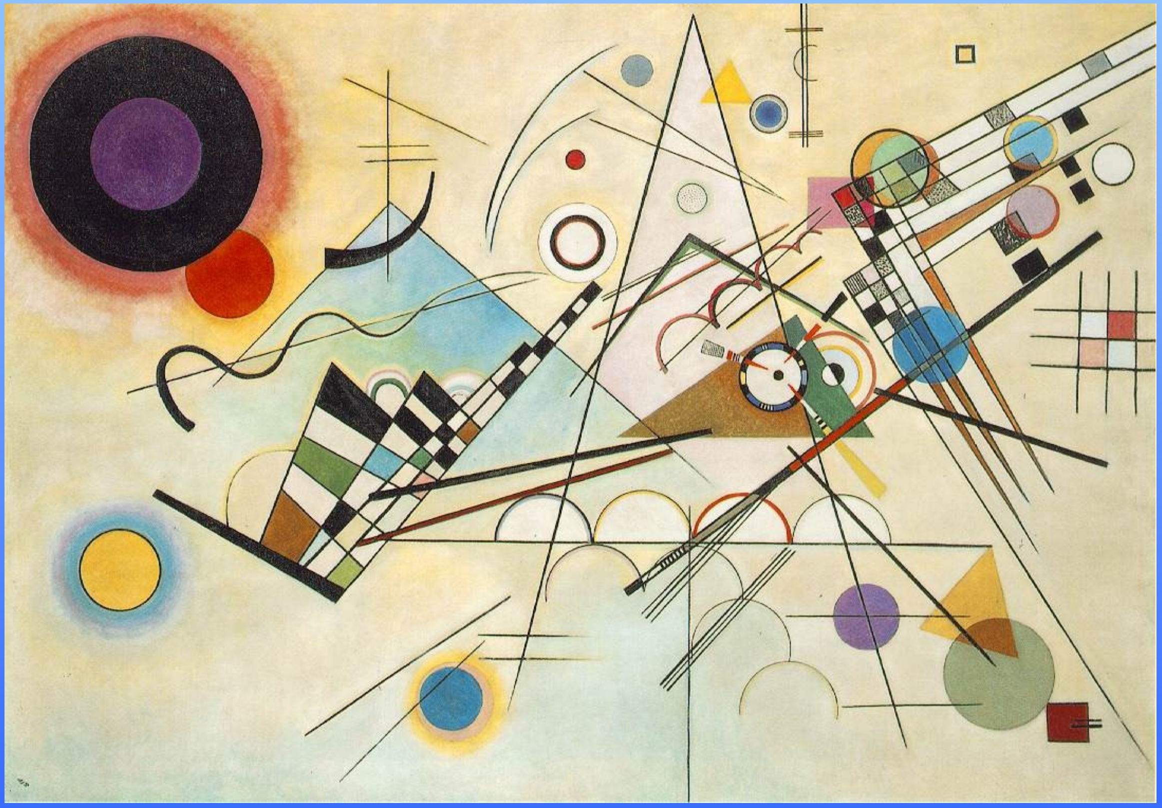
"*In generale penso che la linea retta, che si usa anche troppo in questi ultimi tempi, sia un elemento della costruzione destinato a sparire nel quadro, magari una linea di contrasto, ma solo la linea curva sia la viva espressione dell'idea, vera immagine della vita.[….]Io do una grande importanza al ruolo primario della curva nel quadro, perché si riallaccia a una concezione dinamica dell'universo, e al principio estetico sostenuto in questo scritto, che consiste nel realizzare con costruzioni geometriche dei contorni il più perfetti possibile*".

G. Severini (1883-1966)"Dal cubismo al classicismo"

Il sottotitolo **“Estetica del compasso e del numero”** rivela un atteggiamento sensibile agli aspetti matematici: per l’artista la geometria insieme ai numeri ha ruolo fondamentale nell’organizzazione della tela

Gli artisti del 900’, con specificità proprie, ricorrono alla matematica per la rappresentazione pittorica

- Quadrati, triangoli, cerchi e altre forme geometriche in Paul Klee
- Il rettangolo nel movimento De Stijl
- Le linee e i punti in Kandiskij



Intervallare l’insegnamento con attività che toccano aspetti diversi della matematica rende la vita di classe meno statica e aiuta a dare una immagine della matematica che non abbia origine solo dalle difficoltà

La dimostrazione in matematica

è un attività che va curata in modo particolare
non bisogna limitarsi alla geometria
anche nell'aritmetica ci sono dei semplici quesiti che aiutano gli allievi a rendersi conto della metodologia di procedimento

"La somma di 3 numeri naturali consecutivi è divisibile per 3. Verificalo per qualche caso e dimostralo in generale. Questo fatto è generalizzabile (e come) alla somma di 4 numeri interi consecutivi? E di cinque?E di k?"

La richiesta di verificare per *qualche caso* aiuta il discente a rendersi conto dell’asserto

In generale

se n è un naturale, la somma di tre numeri naturali consecutivi è

$$\boldsymbol{S=n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)}$$

S é multiplo di 3 e quindi la **somma è divisibile per 3**

Se i numeri sono 4 $\boldsymbol{S=2(n+3)}$

S non è multiplo di 4 e quindi la somma **non è divisibile per 4**

Se i numeri sono 5 $\boldsymbol{S=5(n+2)}$

S è multiplo di 5 e quindi la somma è divisibile per 5

Se i numeri sono k

$$S = n + (n+1) + (n+2) \ldots\ldots\ldots\ldots (n + k - 1)$$

$$S = nk + 1/2k(k-1)$$

occorre distinguere:

se **k è dispari** $1/2(k-1) = h$

$$S = nk + hk = k(n+h)$$

la somma S è divisibile per k

se **k è pari** $1/2k = p$

$$S = nk + p(k-1)$$

la somma S non è divisibile per k

Le proporzioni

- Argomento basilare per la formazione scientifica del cittadino
- Osserva al riguardo il pittore Severini:

“mi è capitato molto spesso, parlando con pittori e uomini di cultura, di accorgermi chiaramente che parole come rapporti, proporzioni ecc.

erano per loro qualcosa di vago, di indefinito, di poco chiaro.

E’ la conseguenza di quella mancanza di cultura matematica che è l’orrore del nostro tempo”.

“S***umma*** *de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*”
Luca Pacioli ritiene necessaria la conoscenza delle proporzioni

a chi eserciti qualunque arte o mestiere, come

“*i sartori*” che “… *nelli lor tagli o siano veste o mantelli o coppe o giuboni, e qualunque altro panno di dosso si voglia, niente vale né a l’utile né a la vaghezza di portare, se con debita proportione non sono tagliati e cuciti*”. E giunge a toccare la sensibilità di chiunque quando conclude che “…. *possiamo liberamente dire che la proportione sia substentamento del corpo umano*”; infatti giusta proporzione deve essere osservata dai dottori sia nella composizione di “*medicine, syroppi, pillole e altre cose a la conservazione humana……. ..aparechiate*”, che nella preparazione di “*diete, cibi e altre cure*”.

Nella Distinctione sesta della **Summa** viene affrontata la teoria della proporzioni tra numeri e tra grandezze accompagnata da numerosi quesiti o problemi (90)

Esaminiamo il quesito 32 di pagina 96 che invita a compiere significative riflessioni sulle proprietà e caratteristiche di una proporzione

“Trova quattro numeri proporzionali
che addizionati diano per risultato 50
e tali che la somma del primo con il terzo sia 20
e del secondo con il quarto sia 30”

Indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 i *quattro numeri* tali che

$$x_1 : x_2 = x_3 : x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50; \quad x_1 + x_3 = 20 \quad e \quad x_2 + x_4 = 30$$

Le incognite del problema sono 4 e, a prima vista, può sembrare che 4 siano le condizioni poste; in realtà esse sono 3 poiché due sono dipendenti

Il problema è quindi indeterminato e ammette infinite soluzioni

Data la proporzione **$x_1 : x_2 = x_3 : x_4$**

applicando la proprietà del permutare i medi e del comporre

si ottiene $x_1 : x_3 = x_2 : x_4$ e poi $(x_1 + x_3) : x_1 = (x_2 + x_4) : x_2$

ma $x_1 + x_3 = 20$ e $x_2 + x_4 = 30$

quindi $20 : x_1 = 30 : x_2$

posto $x_1 = a \rightarrow x_3 = 20 - a$; $x_2 = (3/2)a$; $x_4 = 30 - (3/2)a$

Se consideriamo $a > 0$, deve essere $20 - a > 0 \rightarrow 0 < a < 20$

Esistono 19 soluzioni per a naturale

Le 19 soluzioni per 0<a<20

a	x_1	x_2	x_3	x_4
1	**1**	**3/2**	**19**	**57/2**
2	**2**	**3**	**18**	**27**
3	**3**	**9/2**	**17**	**51/2**
4	**4**	**6**	**16**	**24**
5	**5**	**15/2**	**15**	**45/2**
6	**6**	**9**	**14**	**21**
7	**7**	**21/2**	**13**	**39/2**
8	**8**	**12**	**12**	**18**
9	**9**	**27/2**	**11**	**33/2**
10	**10**	**15**	**10**	**15**

a	x_1	x_2	x_3	x_4
10	**10**	**15**	**10**	**15**
11	**11**	**33/2**	**9**	**27/2**
12	**12**	**18**	**8**	**12**
13	**13**	**39/2**	**7**	**21/2**
14	**14**	**21**	**6**	**9**
15	**15**	**45/2**	**5**	**15/2**
16	**16**	**24**	**4**	**6**
17	**17**	**51/2**	**3**	**9/2**
18	**18**	**27**	**2**	**3**
19	**19**	**57/2**	**1**	**3/2**

Analisi delle soluzioni: dai quadri risalta che

- per uno stesso valore di **a**:

  - la somma dei numeri della 1° e 3° colonna è sempre 20

  - la somma di quelli della 2° e 4° è 30

Le 19 soluzioni per 0<a<20

a	x_1	x_2	x_3	x_4
1	**1**	**3/2**	**19**	**57/2**
2	**2**	**3**	**18**	**27**
3	**3**	**9/2**	**17**	**51/2**
4	**4**	**6**	**16**	**24**
5	**5**	**15/2**	**15**	**45/2**
6	**6**	**9**	**14**	**21**
7	**7**	**21/2**	**13**	**39/2**
8	**8**	**12**	**12**	**18**
9	**9**	**27/2**	**11**	**33/2**
10	**10**	**15**	**10**	**15**

a	x_1	x_2	x_3	x_4
10	**10**	**15**	**10**	**15**
11	**11**	**33/2**	**9**	**27/2**
12	**12**	**18**	**8**	**12**
13	**13**	**39/2**	**7**	**21/2**
14	**14**	**21**	**6**	**9**
15	**15**	**45/2**	**5**	**15/2**
16	**16**	**24**	**4**	**6**
17	**17**	**51/2**	**3**	**9/2**
18	**18**	**27**	**2**	**3**
19	**19**	**57/2**	**1**	**3/2**

Analisi delle soluzioni: dai quadri risalta che

- per uno stesso valore di **a**:

  - la somma dei numeri della 1° e 3° colonna è sempre 20

  - la somma di quelli della 2° e 4° è 30

- i valori di x_1 partono da 1 e aumentano successivamente di 1, mentre i valori di x_3 partono da 19 e diminuiscono di 1;

  i valori di x_2 partono 3/2 aumentano di 3/2 , quelli di x_4 partono da 57/2 e diminuiscono di 3/2

Le 19 soluzioni per 0<a<20

a	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	3/2	19	57/2
2	2	3	18	27
3	3	9/2	17	51/2
4	4	6	16	24
5	5	15/2	15	45/2
6	6	9	14	21
7	7	21/2	13	39/2
8	8	12	12	18
9	9	27/2	11	33/2
10	10	15	10	15

a	x_1	x_2	x_3	x_4
10	10	15	10	15
11	11	33/2	9	27/2
12	12	18	8	12
13	13	39/2	7	21/2
14	14	21	6	9
15	15	45/2	5	15/2
16	16	24	4	6
17	17	51/2	3	9/2
18	18	27	2	3
19	19	57/2	1	3/2

Analisi delle soluzioni: dai quadri risalta che

- per uno stesso valore di **a**:
  - la somma dei numeri della 1° e 3° colonna è sempre 20
  - la somma di quelli della 2° e 4° è 30
- i valori di x_1 partono da 1 e aumentano successivamente di 1, mentre i valori di x_3 partono da 19 e diminuiscono di 1;

  i valori di x_2 partono 3/2 aumentano di 3/2 , quelli di x_4 partono da 57/2 e diminuiscono di 3/2
- la conoscenza di una quaterna di numeri proporzionali permette di ritrovare tutte le altre addizionando o sottraendo le stesse quantità rispettivamente al primo e al terzo, al secondo e al quarto
- le quaterne di numeri si ripetono: la prima e l'ultima quaterna sono costituite dagli stessi numeri; e così pure la seconda e la penultima e così via

Le 19 soluzioni per 0<a<20

a	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	3/2	19	57/2
2	2	3	18	27
3	3	9/2	17	51/2
4	4	6	16	24
5	5	15/2	15	45/2
6	6	9	14	21
7	7	21/2	13	39/2
8	8	12	12	18
9	9	27/2	11	33/2
10	10	15	10	15

a	x_1	x_2	x_3	x_4
10	10	15	10	15
11	11	33/2	9	27/2
12	12	18	8	12
13	13	39/2	7	21/2
14	14	21	6	9
15	15	45/2	5	15/2
16	16	24	4	6
17	17	51/2	3	9/2
18	18	27	2	3
19	19	57/2	1	3/2

Analisi delle soluzioni: dai quadri risalta che

- per uno stesso valore di **a**:

  - la somma dei numeri della 1° e 3° colonna è sempre 20
  - la somma di quelli della 2° e 4° è 30

- i valori di x_1 partono da 1 e aumentano successivamente di 1, mentre i valori di x_3 partono da 19 e diminuiscono di 1;

  i valori di x_2 partono 3/2 aumentano di 3/2 , quelli di x_4 partono da 57/2 e diminuiscono di 3/2

- la conoscenza di una quaterna di numeri proporzionali permette di ritrovare tutte le altre addizionando o sottraendo le stesse quantità rispettivamente al primo e al terzo, al secondo e al quarto
- le quaterne di numeri si ripetono: la prima e l'ultima quaterna sono costituite dagli stessi numeri; e così pure la seconda e la penultima e così via
- solo le soluzioni per $1 \leq a \leq 10$ sono distinte
- ci sono 9 soluzioni intere, le altre sono razionali
- esiste una quaterna di numeri che individua una proporzione continua

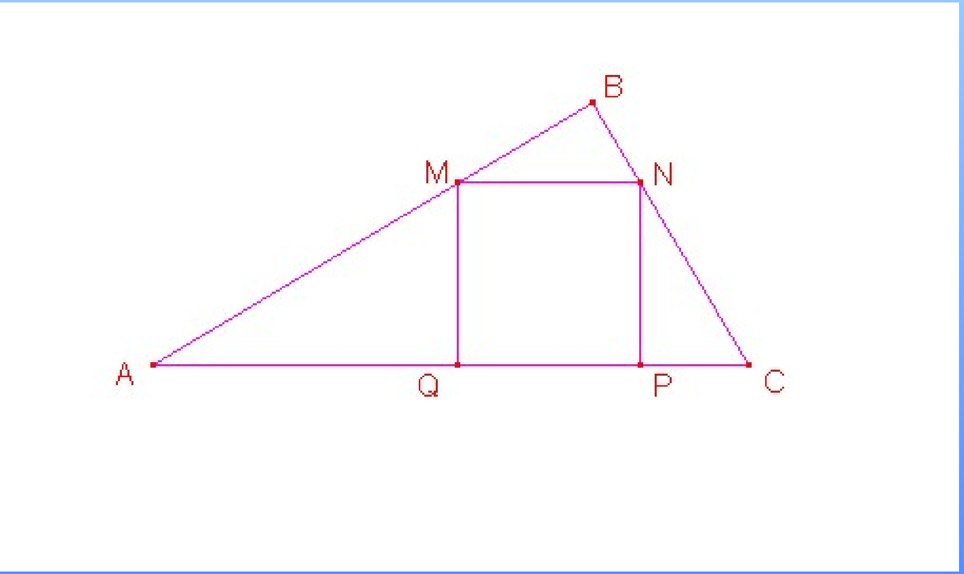
Le 19 soluzioni per 0<a<20

a	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	3/2	19	57/2
2	2	3	18	27
3	3	9/2	17	51/2
4	4	6	16	24
5	5	15/2	15	45/2
6	6	9	14	21
7	7	21/2	13	39/2
8	8	12	12	18
9	9	27/2	11	33/2
10	10	15	10	15

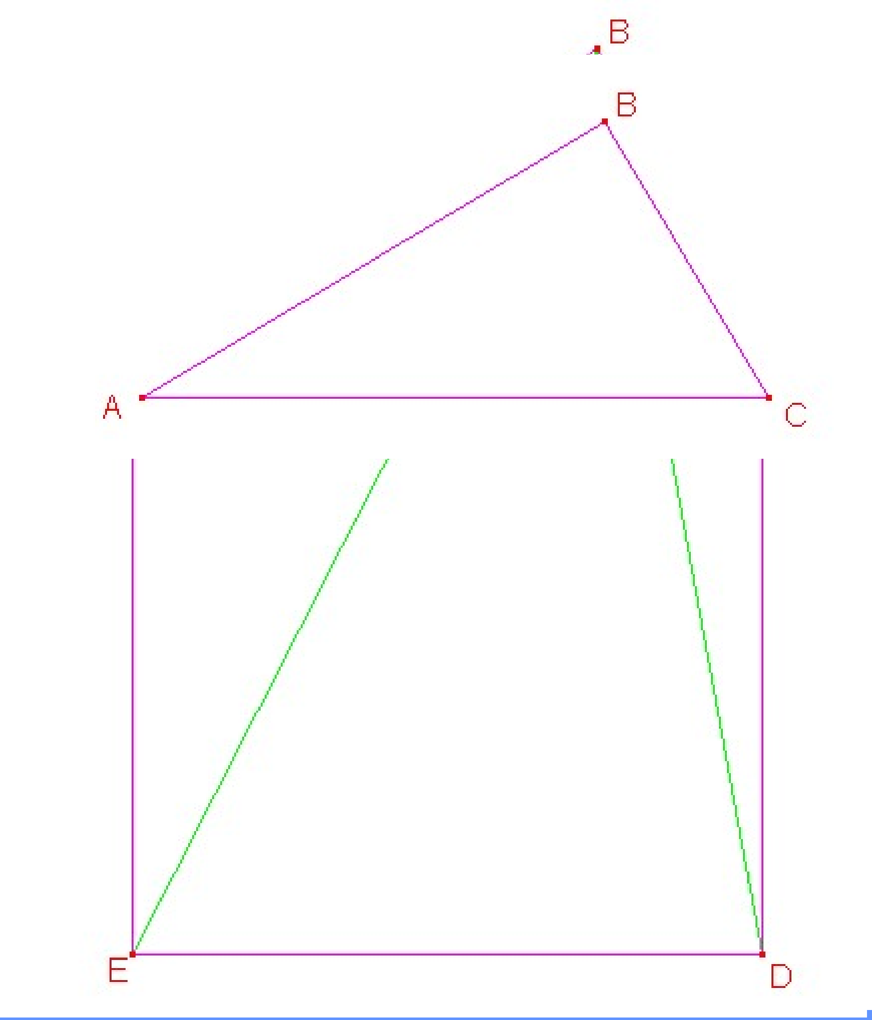
a	x_1	x_2	x_3	x_4
10	10	15	10	15
11	11	33/2	9	27/2
12	12	18	8	12
13	13	39/2	7	21/2
14	14	21	6	9
15	15	45/2	5	15/2
16	16	24	4	6
17	17	51/2	3	9/2
18	18	27	2	3
19	19	57/2	1	3/2

Un problema sulle proporzioni che apre più aspetti di natura geometrica

“ ***Se in un triangolo rettangolo ABC, retto in B, è inscritto un quadrato MNPQ, con il lato PQ sopra l’ipotenusa AC, questa risulta divisa in tre segmenti AQ, QP, PC che formano una proporzione continua***”



- Disegniamo il triangolo ABC retto in B
- per inscrivere in esso un quadrato costruiamo il quadrato ACDE
- congiungiamo Il vertice B con D e con E
- i segmenti BD e BE incontrano il lato AC in P e Q
- tirando da questi le perpendicolari ad AC, queste incontrano BC in N e AB in M,il quadrilatero MNPQ così ottenuto è un quadrato



per la similitudine dei triangoli BED e BQP si ha : **ED:QP=BD:BP**

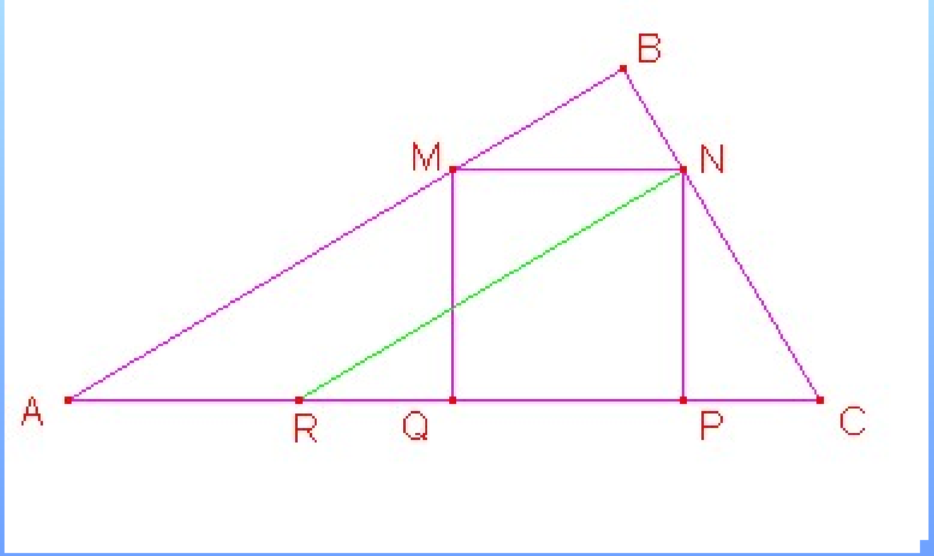
Per la similitudine dei triangoli BDC e BPN   si ha : **BD:BP=CD:NP**

per la proprietà transitiva **ED:QP=CD:NP** da cui   **ED:CD=QP:NP** ma **CD=ED** per costruzione e quindi anche **QP=NP** e il quadrilatero MNPQ è un quadrato.

Per la dimostrazione della proporzione AQ:QP=QP:PC gli studenti hanno seguito 2 diverse strategie

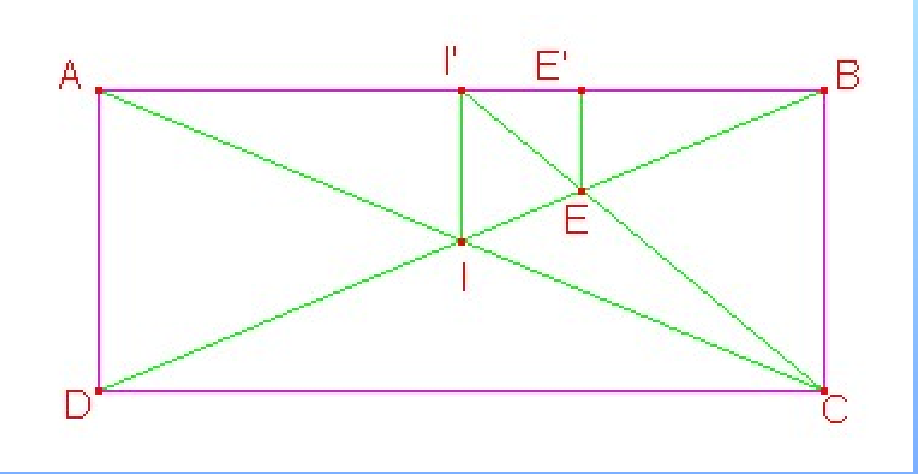
- Alcuni sono giunti alla proporzione continua rilevando la similitudine dei triangoli AMQ e PNC
- Altri, tracciando da N la parallela al lato AB che incontra AC in R, hanno mostrato la congruenza dei triangoli AMQ e RNP e quindi dei lati RP e AQ.

  Hanno applicato il 2 teorema di Euclide al triangolo rettangolo RNC



Una generazione geometrica dei reciproci dei numeri naturali partendo da un rettangolo con una dimensione uguale all'unità

Sia ABCD un rettangolo e sia 1 la misura di AB



Le diagonali si incontrano in I e sia I' la proiezione ortogonale di I su AB

$\overline{BI'}$ =1/2

Uniamo C con I', la diagonale BD incontra C I' in E

E' è proiezione ortogonale di E su AB: $\overline{BE'}$ =1/3

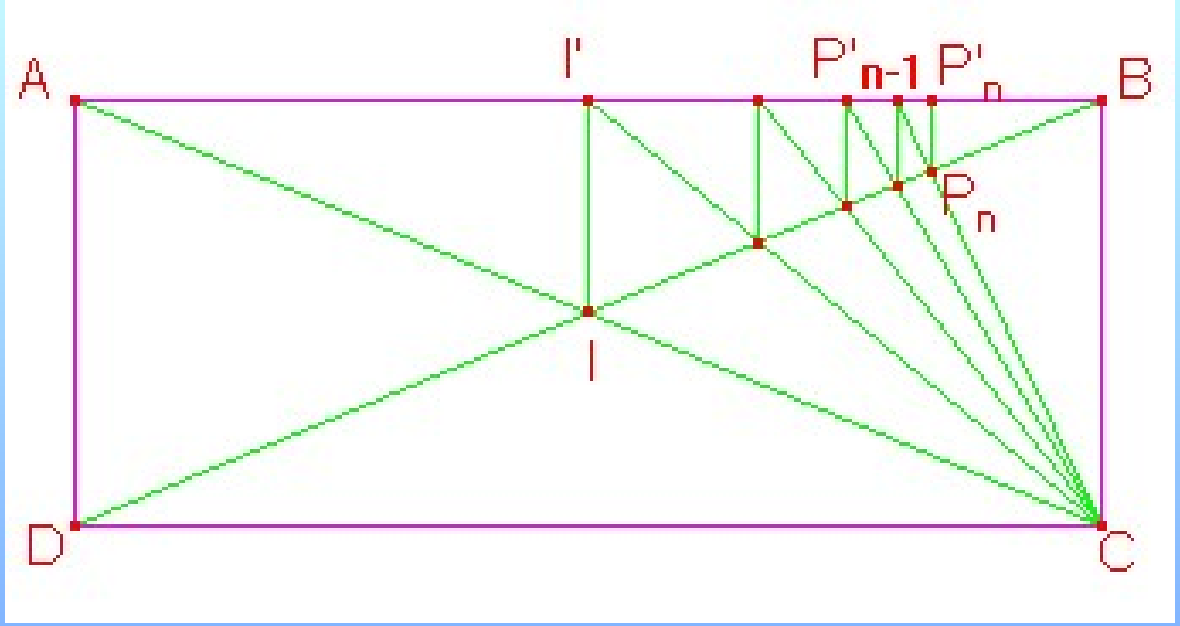
Per Talete è E'B:AE'=BE:DE

Per la similitudine dei triangoli I'EB e DEC è

BE:DE=I'B:DC

per la proprietà transitiva E'B:AE'=I'B:DC

da cui E'B : (1-E'B)=I'B : DC e quindi $\overline{BE'}$ =1/3



- Per n=2 e per n=3 è vero
- Supposto vero che la distanza di $P'_{n-1}B=1/(n-1)$
- In maniera analoga si mostra che il successivo punto P'_n ha distanza da B 1/n
- In generale, per il principio di induzione,l'ennesimo punto $P'_{n,}$ proiezione del punto P_n comune alla diagonale DB e al segmento CP'_{n-1} ,avrà distanza dal vertice B: 1/n

$$P'_n B=1/n$$

Il livello della classe suggerirà

se limitarsi

ad una esposizione puramente intuitiva

o procedere

con una dimostrazione rigorosa che poggia sul principio di induzione

La costruzione con riga e compasso o con Cabri

Le costruzioni svolgono un ruolo importante nell'insegnamento della geometria piana

- si afferma nel ragazzo la consapevolezza che l'esistenza di un oggetto geometrico, dipende dalla sua costruzione
- mette il discente in contatto con le idee che risolvono i problemi
- lo abitua ad analizzare il problema prima di procedere alla sua risoluzione

Costruire un triangolo ABC,note le misure c, b, m, rispettivamente dei lati AB, AC e della mediana AA'

Supposto il problema risolto, sia ABC il triangolo cercato

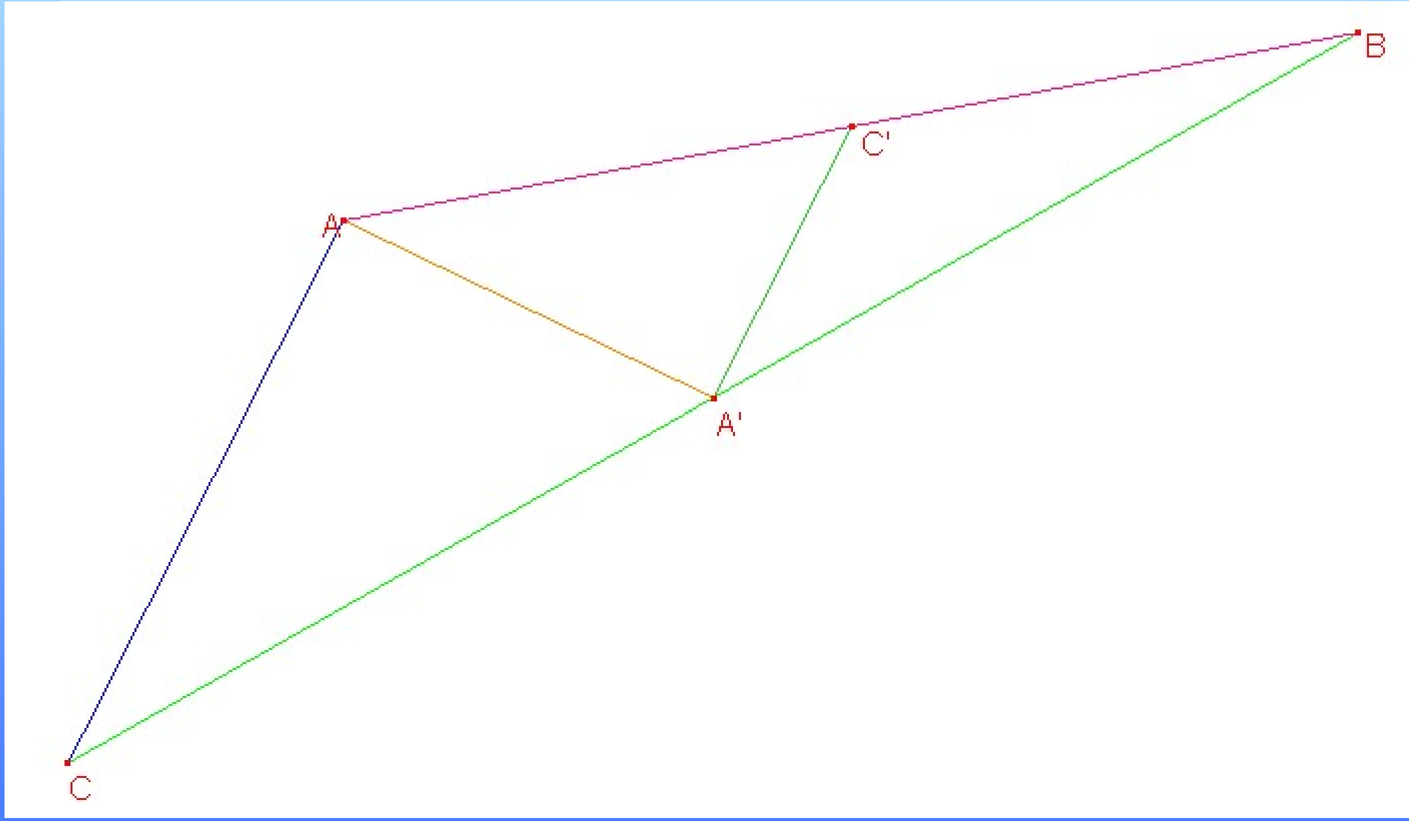
Detto C' il punto medio di AB, risulta A'C'= (1/2)AC

Del triangolo AA'C' sono note le misure dei tre lati:

AA'

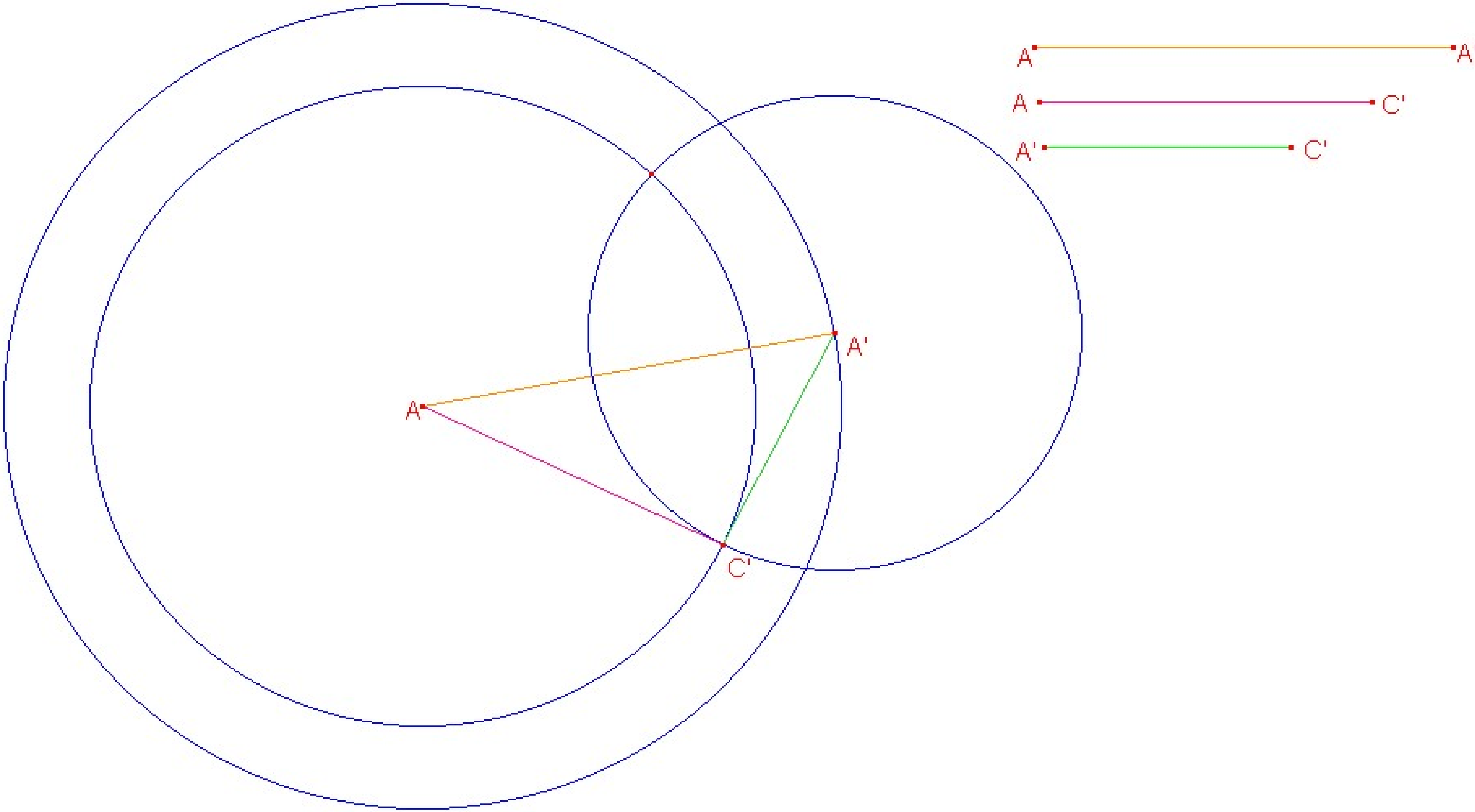
A'C'=(1/2)AC

AC'=(1/2)AB



La costruzione del triangolo AA'C' è possibile se e solo se |AC'- A'C'|<AA'<AC'+A'C'

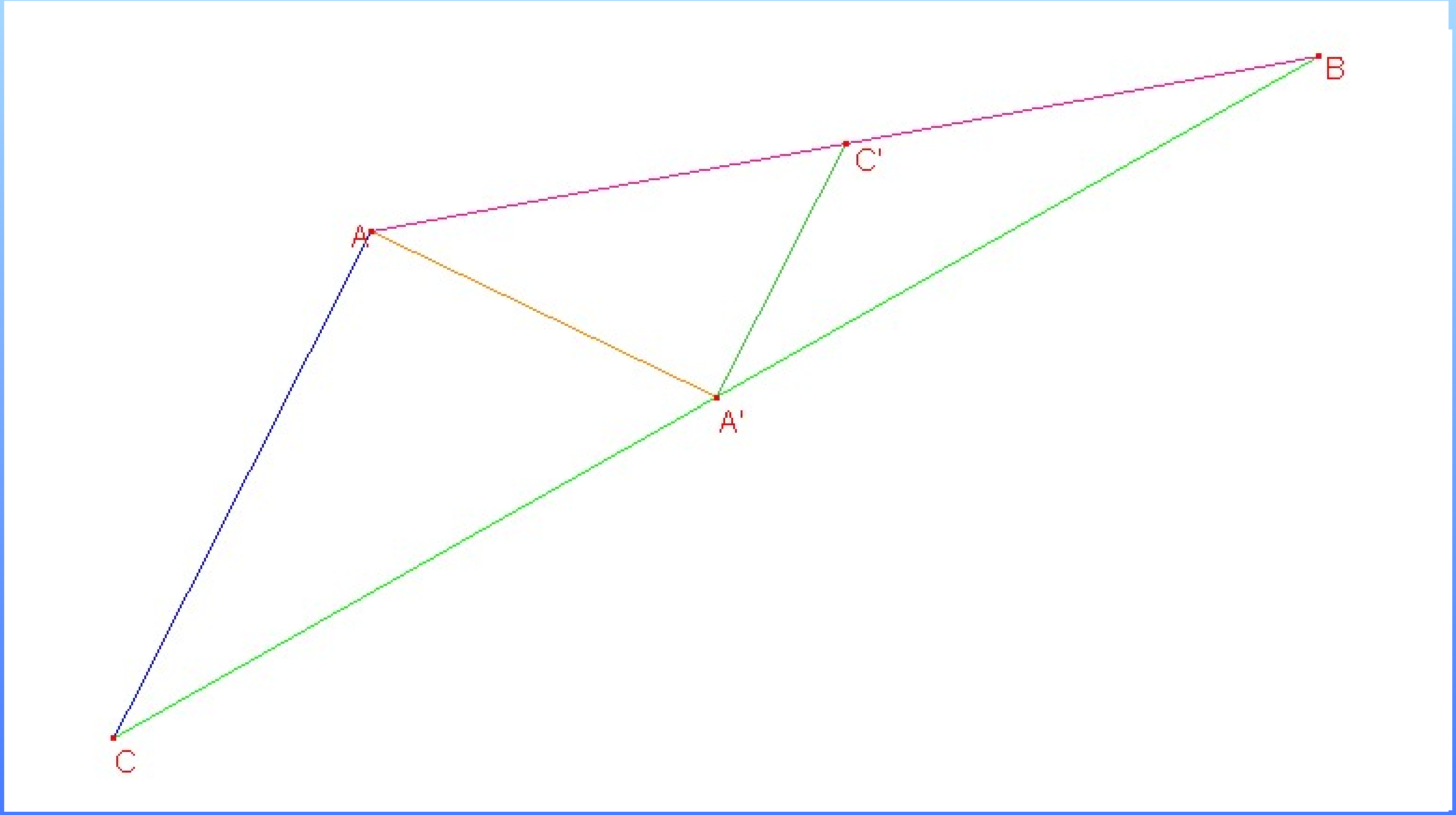
Costruzione del triangolo note le misure dei suoi lati



Si determina quindi B come simmetrico di A rispetto a C’

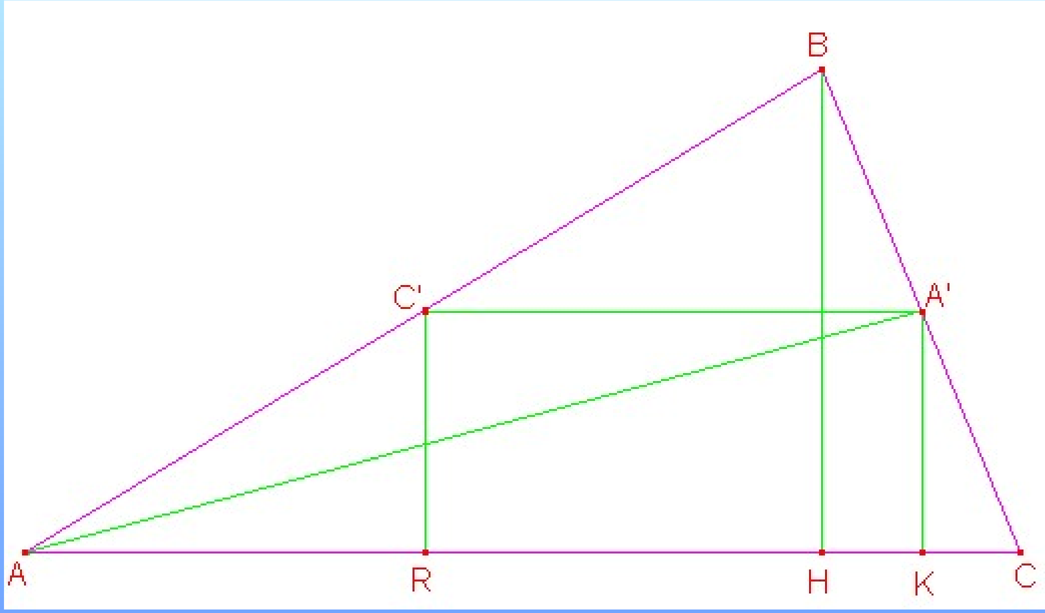
C come simmetrico di B rispetto ad A’

si ottiene così il triangolo ABC richiesto



Risoluzione algebrica del problema

La **costruzione geometrica** suggerisce la strategia da seguire per determinare il triangolo seguendo il procedimento algebrico



$\overline{AC}$=b, $\overline{AB}$=c, $\overline{AA'}$=m, $\overline{C'A'}=\frac{1}{2}$b, $\overline{AC'}=\frac{1}{2}$c

Sia $\overline{A'K}=\overline{C'R}$=y e $\overline{KC}$=x

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli AA'K e AC'R

si ottiene : $y^2 = m^2 - (b - x)^2$ e $y^2 = \frac{c^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$.

Risolvendo si ottengono le misure rispettivamente di x e y:

$$x = \frac{c^2 + 3b^2 - 4m^2}{4b}; \quad y = \sqrt{m^2 - \left(\frac{b^2 - c^2 + 4m^2}{4b}\right)^2}.$$

Per Talete è BH=2A'K e HC =2KC e quindi, applicando Pitagora si ricava la misura del lato BC.

La condizione $m^2 - \left(\frac{b^2 - c^2 + 4m^2}{4b}\right)^2 \geq 0$

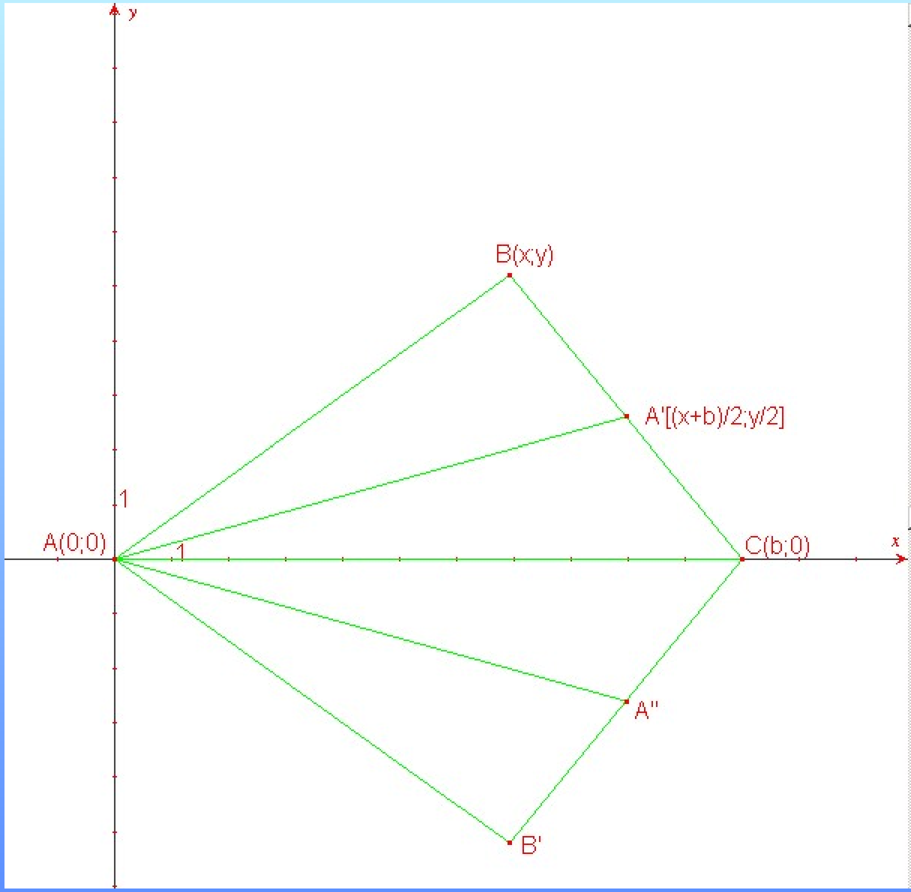
porta alla relazione $|b-c|<2m<b+c$.

La Risoluzione Analitica

Richiede:

-conoscenze minime di geometria analitica

- scelta opportuna del sistema di riferimento



Poniamo l'origine in A(0;0), il lato AC sull'asse delle x quindi è C(b;0). Risolvere il triangolo significa determinare le coordinate del vertice B(x;y).

$\overline{AB}$ =c e quindi è $\sqrt{x^2+y^2}=c$;

A', punto medio del lato BC, ha coordinate: $A'=\left(\frac{x+b}{2};\frac{y}{2}\right)$.

Poiché è $\overline{AA'}=m$, si può scrivere $\sqrt{\left(\frac{x+b}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}=m$.

Passando ai quadrati si ha il sistema $\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ x^2+2bx+b^2+y^2=4m^2 \end{cases}$

Da cui le coordinate di B e B'
$$\begin{cases} x=\dfrac{4m^2-c^2-b^2}{2b} \\ y=\pm\sqrt{c^2-\left(\dfrac{4m^2-c^2-b^2}{2b}\right)^2} \end{cases}$$

La condizione $c^2-\left(\frac{4m^2-c^2-b^2}{2b}\right)^2>0$

porta alla relazione $|b-c|<2m<b+c$.

Dal Leelavati del matematico indiano Bhaskara (XIIsec.d.C.)

"*Dentro una foresta, un numero di scimmie uguale al quadrato di 1/8 del loro numero totale, sta lavorando con entusiasmo. Le rimanenti 12 scimmie sono su una collina. L'eco delle loro grida dalle colline circostanti provoca la loro furia. Quale è il numero totale delle scimmie*"

1. Verifica che, indicando con x il numero delle scimmie, giungi all'equazione $(1/8x)^2 -x +12 = 0$

3. Scrivi l'equazione nella forma $(1/8x)^2 = x -12$ e rappresenta, nel piano cartesiano, la parabola $y= (1/8x)^2$ e la retta $y=x-12$

5. Cosa indicano le ascisse dei punti comuni alla retta e alla parabola?

7. Dall'analisi dei segni dei coefficienti dell'equazione $(1/8x)^2 -x +12= 0$ puoi dedurre il segno delle radici? In base a quale regola?Qual è il segno di queste ascisse? Il problema ammette soluzioni negative?

8. Risolvi l'equazione, trovi: $x_1=16$, $x_2=48$

10. Indica con x un multiplo di 8 secondo un numero naturale n. Determina quei valori di n il cui quadrato non supera la differenza tra x e 12

Il problema è articolato in domande con difficoltà crescente al fine di valutare i vari livelli di apprendimento degli studenti

- impostazione di una equazione
- rappresentazione grafica di funzioni elementari
- interpretazione analitica delle soluzioni
- analisi del segno delle soluzioni dell'equazione di 2° grado
- risoluzione dell'equazione
- impostazione e risoluzione di una disequazione

I **quesiti P.I.S.A** che hanno lo scopo di verificare

l'alfabetizzazione dei quindicenni

sono formulati secondo questa linea, cioè con domande con difficoltà crescente

I QUESITI P.I.S.A
hanno come obiettivo

di educare a cogliere relazioni di tipo algebrico, geometrico, funzionale in fenomeni di vario genere

o più sinteticamente

a ritrovare la matematica in situazioni reali

Conviene utilizzare nella didattica anche tali quesiti che aiutano nel promuovere una adeguata formazione scientifica e culturale dell’allievo

Matematica e divertimento

- Perché non fare matematica per divertirsi?

- Il gioco non è una perdita di tempo, ma un importante mezzo di ricreazione con significative valenze formative nel suo educare ad operare insieme con intuizione, razionalità e lealtà nel rispetto delle regole

- Il gioco intelligente è una delle forme più semplici e allo stesso tempo più efficaci per ravvivare la creatività dei nostri allievi

In una fase di assimilazione o di ripasso di un certo argomento si può vivacizzare la situazione di per sé monotona, proponendo quesiti in veste accattivante e curiosa

- **Sudoku ed equazioni**
- **Crucinumero e problemi da risolversi con equazioni**
- **Cruciverba e geometria piana**

Sudoku ed equazioni

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Si riempiono i quadri gialli risolvendo le equazioni seguenti

- (CI) ; (I4) ; (D7); (A8): $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 24$
- (D1) ; (A3) ; (E4) ; (B5); (F9):
  $$\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} + \frac{4-12x}{x^2-1} = 0$$
- (E1) ; (H3); (B4); (F6);(I17); (C8): $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{15}{4} = 0$
- (F1); (G2); (A7); (E9): $x^2-16x+64=0$
- (C2); (D4); (B7); (H6):
  $$\frac{(x-2)^3 - (x-2)(x^2+2x+4)}{x} = 6$$
- (D2); (I3); (E5); (F7); (G9): $x^2=8(x-2)$
- (F2); (C3); (E6); (G7); (D8): $(x+1)(1+2x)+(1-x)(3+2x)=3x-5$
- (D3); (H5); (A6); (G8): $x^3-3x^2+x-3=0$
- (I2); (F8): $3[x-3(x-1)]-3[x-2(x+2)]=0$.

Esempio

(D3); (H5); (A6); (G8): $x^3-3x^2+x-3=0$

Scomponendo in fattori si ottiene $(x^2+1)(x-3)=0$ da cui $x=3$
Il numero 3 viene collocato nelle caselle indicate

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3				3					
4									
5								3	
6	3								
7									
8							3		
9									

Si ottiene il seguente quadro

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			6	2	5	8			
2			1	4		9	8		7
3	2		9	3				5	4
4		5		1	2				6
5		2			4			3	
6	3				9	5		1	
7	8	1		6		4	9		5
8	6		5	9		7	3		
9					8	2	4		

Si passa a completare la griglia secondo le regole del gioco Sudoku

si riempiono con i numeri da 1 a 9 ciascuna riga ciascuna colonna

ciascun riquadro di 3x3 celle

in modo tale che

in ogni riga

in ogni colonna

e riquadro siano presenti

le cifre da 1 a 9

senza ripetizione

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4	7	6	2	5	8	1	9	3
2	5	3	1	4	6	9	8	2	7
3	2	8	9	3	7	1	6	5	4
4	9	5	8	1	2	3	7	4	6
5	1	2	7	8	4	6	5	3	9
6	3	6	4	7	9	5	2	1	8
7	8	1	2	6	3	4	9	7	5
8	6	4	5	9	1	7	3	8	2
9	7	9	3	5	8	2	4	6	1

Crucinumero

per far acquisire all'allievo dimestichezza nella lettura, interpretazione e svolgimento di semplici problemi

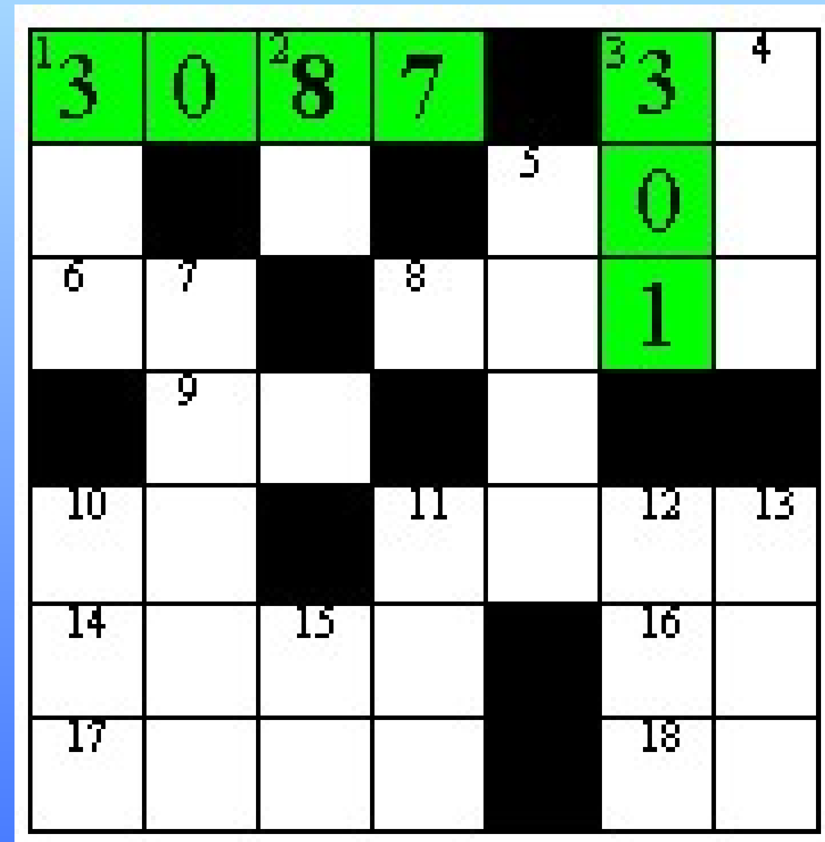
- Orizzontali:

1. differenza tra un numero di 4 cifre consecutive in ordine decrescente e quello ottenuto con le stesse cifre in ordine inverso

   (esempio: ABCD-DCBA)

- Verticali:

3. un numero tale che, se da esso si sottrae 7, si divide per 7 tale differenza, si aggiunge 7 al quoziente ottenuto e infine si divide il risultato per 7, si ottiene ancora 7.



Cruciverba e geometria

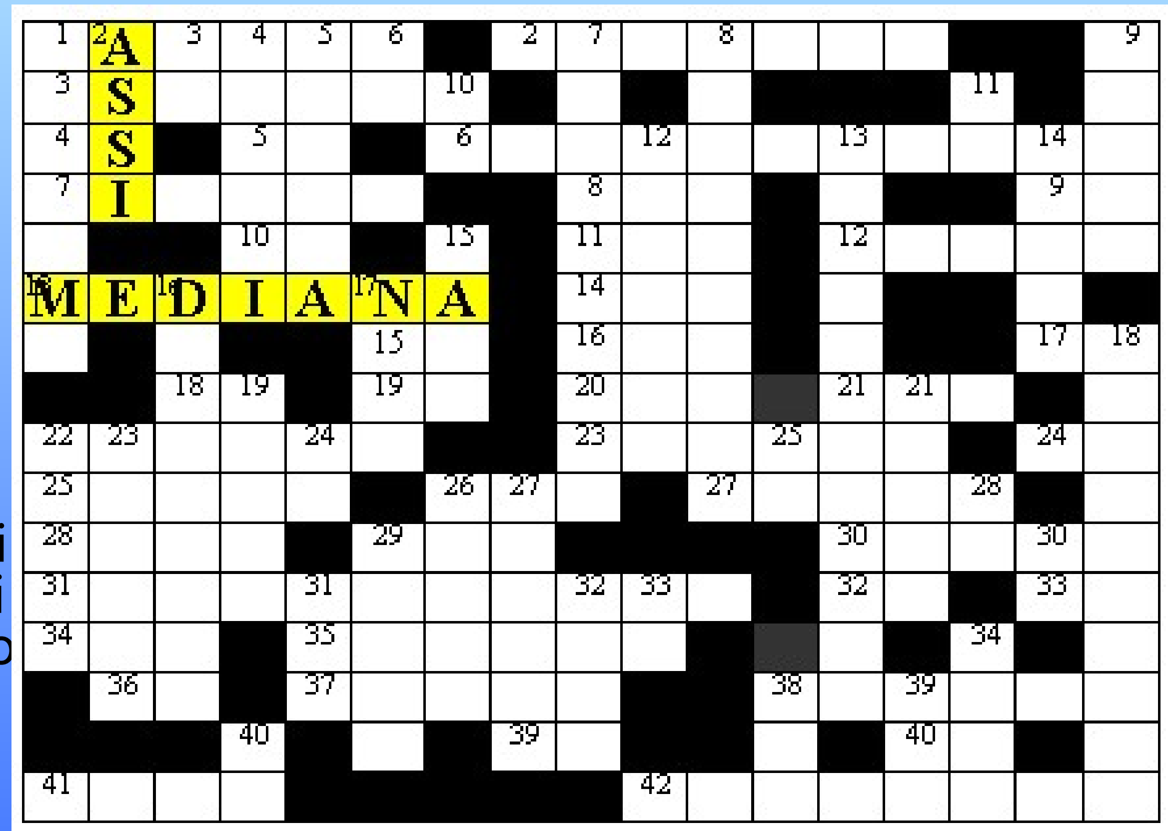
utile al termine dell’anno scolastico per un ripasso dei contenuti di geometria, per rinfrescare la terminologia, per rivedere i concetti

ORIZZONTALI :

13. E’ metà dell’ipotenusa in un triangolo rettangolo

VERTICALI:

2. Sono rette perpendicolari ad un segmento passanti per il punto medio di esso



Le parole del Prof.re Luigi Campedelli

“Troppo spesso i ricordi scolastici inducono a pensare alla matematica come ad un cammino obbligato in cui tutto è perfetto e dominato da procedimenti meccanici; una strada che non presenta nessun bivio, così da consentire un eventuale cambiamento di direzione, che non sfocia mai in una piazza, dalla quale partono altre vie, in modo da rendere necessaria una scelta. Ebbene: perfezione e meccanicità possono suscitare ammirazione; ma è un’ammirazione che non dà luogo a risonanze interiori. E soprattutto allontana i giovani, i quali si volgono agli studi, vengono alla nostra scuola, per averne arricchimento e calore di vita. La matematica sembra non poterli dare.”

(Luigi Campedelli, Fantasia e Logica, pag:126-127)

Considerazioni Finali

- rifuggire da una matematica arida, fredda, misteriosa, non collegabile con la realtà, immutabile nel tempo e nello spazio
- muoversi verso concezioni della matematica che poggiano sulla storia, sulla cultura, sulla realtà, sull'estetica
- mostrare che la matematica ha forme diverse in differenti culture
- far capire che la matematica serve per interpretare e risolvere situazioni reali
- far scoprire che può suscitare piacere nel singolo, ma implica anche conversazione, discussione con l'altro e comunicazione di idee

Bibliografia

- Silvana Bianchini - Carla Simonetti

Matematica: Metodo, Cultura,Scienza

G.D'Anna Firenze 2008

- Luciano Cresci ***I numeri Celebri***

Bollati boringhieri Torino 2000

- ***A.P.M.E.P*** Bollettino di Matematica Francese

- Luca Pacioli ***Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*** 1494 Venezia
- Malbo Tahan ***L'uomo che sapeva contare***

Salani Firenze 1998

- Godffey H. Hardy ***Apologia di un matematico***

Garzanti Milano 2002