LA CERTEZZA MATEMATICA: ESISTE?

FIRENZE, 25 FEBBRAIO 2009

MARIO FERRARI – PAVIA

1 – INTRODUZIONE

Debbo confessarvi che questa conferenza è stata pensata, nel 2006, per un pubblico di non matematici e ripetuta, poi, per studenti che partecipavano alle attività di orientamento nella Università di Pavia. Per voi le cose che dirò appariranno ovvie. Ve ne chiedo scusa in anticipo. Può darsi, però, che ci sia ugualmente qualcosa di interessante.

Anche se la matematica non è molto popolare presso l'opinione pubblica di qualsiasi livello culturale, mi sembra che tutti le riconoscano tre tipiche qualità:

- **La certezza**. Le affermazioni matematiche sono sicure, indubitabili, certe. Di una affermazione, di qualsiasi tipo, della quale è impossibile dubitare si suole dire che "è matematicamente certa". Davanti alla certezza matematica non resta che inchinarsi. Di un fatto di cui si è assolutamente sicuri si dice che è certo come "2 più 2 fa 4".
- **La verità**. Le proposizioni matematiche, i teoremi, sono vere, assolutamente vere, eternamente vere. Parafrasando un motto dello scoutismo francese si direbbe: "vera un giorno, vera per sempre". Una proposizione matematica non può essere vera oggi e falsa domani, vera per Tizio e falsa per Caio.
- **La rigorosità**. Le proposizioni matematiche sono rigorose non solo nel senso che sono formulate in un linguaggio preciso ed essenziale, ma anche, e soprattutto, nel senso che sono dimostrate in modo inconfutabile, convincente.

Penso che anche tutti voi condividete queste convinzioni. Ma le cose stanno veramente così?
Prima di proporvi alcune mie riflessioni personali vi riporto alcune affermazioni di matematici professionisti.

La certezza.
Bertrand Russell dedicò molti anni della sua lunga vita alla ricerca di fondamenti sicuri per tutta la matematica dando vita anche una "scuola fondazionale" chiamata "Logicismo". Alla fine di questa ricerca scrisse, nel volume "Ritratti a memoria" (Longanesi, Milano 1958) quanto segue:
"Volevo la certezza nello stesso modo in cui gli uomini vogliono la fede religiosa, e pensavo che avrei avuto più probabilità di trovarla in matematica che altrove. Ma scoprii che molte dimostrazioni matematiche che i miei maestri ritenevano dovessi accettare erano piene di errori e che, se era possibile scoprire la certezza in matematica, ciò sarebbe accaduto in una sua nuova area basata su fondamenti più solidi di quelli considerati sicuri in passato. Man mano che il lavoro procedeva, mi continuava a tornare alla mente la favola dell'elefante e della tartaruga. Dopo aver costruito un elefante su cui poter appoggiare il mondo matematico, mi accorsi che l'elefante era malfermo e procedetti alla costruzione di una tartaruga che gli impedisse di cadere. Ma la tartaruga non era più salda dell'elefante e dopo circa vent'anni di durissimo lavoro giunsi alla conclusione che non c'era nient'altro che potessi fare per rendere la conoscenza matematica esente da ogni dubbio".
Ne "La mia vita di filosofo" (1959) Russell confessò: "La splendida certezza che avevo sempre sperato di trovare in matematica si perse in un incredibile ginepraio".

La verità.
Morris Kline è un fisico-matematico statunitense, autore di volumi sulla storia della matematica (Storia del pensiero matematico, 2 volumi, Einaudi, Torino 1991) e di un volume che ha fatto scalpore per il suo titolo (Matematica. La perdita della certezza, Mondadori, Milano 1985).
Il brano che segue è preso da "La matematica nella cultura occidentale" (Feltrinelli, Milano, 1976).
"La matematica è un corpo di conoscenza. Essa non contiene però verità. La convinzione contraria, che la matematica sia cioè un insieme inattaccabile di verità, che essa sia una sorta di rivelazione finale di Dio, così come le persone devote considerano la Bibbia, è un errore popolare che è estremamente difficile sradicare. Fino al 1850 anche molti matematici davano il loro assenso a questo errore. Fortunatamente alcuni eventi dell'Ottocento, dimostrarono ai matematici l'errore insito in questo atteggiamento. Non soltanto nella matematica non c'è nulla di vero, ma taluni teoremi accettati in alcuni settori contraddicono altri teoremi in altri settori. Ad esempio, alcuni teoremi stabiliti in geometrie create nel corso dell'Ottocento contraddicono quelli dimostrati da Euclide nel suo sviluppo della geometria. Benché priva di verità, la matematica ha conferito all'uomo uno straordinario potere sulla natura."(pag. 21).
Alla luce di questa affermazione che dire della trionfante proclamazione di Odifreddi: "Diversamente dalle religioni, la scienza non ha dunque bisogno di rivendicare nessun monopolio della verità: semplicemente ce l'ha."? (Si veda la recensione del "modestissimo libro" "Perché non possiamo essere cristiani (e meno che mai cattolici)" di Aldo Grasso sul Magazine del Corriere della sera, N. 12 del 22/3/2007)

La rigorosità.
Il brano che segue è preso dalla "Prefazione" di Pierre Thuillier al volume "I matematici", di autori vari (Ghisetti e Corvi, Milano 2005).
"Questa raccolta di saggi darà inoltre occasione di constatare che il concetto di *rigore*, di primaria importanza per la matematica occidentale, non ha comunque un contenuto invariabile. Ciò che in un'epoca è considerato rigoroso può rivelarsi approssimativo qualche decennio più tardi. Si pensi, per esempio, ai contributi di Cauchy a proposito dei concetti di limite e di continuità. René Thom si è espresso in termini lapidari: "Non esiste una definizione rigorosa di rigore".

Con queste citazioni ho messo le mani avanti e passo alla proposta di alcune riflessioni.

2 – UNA AFFERMAZIONE FORSE INASPETTATA: IN MATEMATICA LE COSE CAMBIANO.

E' opinione molto diffusa che la matematica sia una disciplina ingessata, imbalsamata, senza novità. Quante volte mi sono sentito dire: "che cosa c'è da ricercare in matematica? 2 più 2 non fa sempre 4?" Basterebbe scorrere un qualsiasi manuale di storia della matematica per convincersi che le cose stanno diversamente. Lungo i secoli sono state rimescolate teorie venerande, sono state inventate nuove teorie, è cambiato il modo stesso di pensare la matematica. La matematica è un albero rigoglioso in perenne espansione e fioritura. Ma non è di questo che voglio parlare.

E' opinione diffusa che nell'ambito di teorie codificate e, magari, millenarie come la geometria elementare e l'aritmetica, gli "oggetti matematici" occupino sempre la stessa posizione, manifestino sempre la stessa fisionomia, mantengano sempre la stessa importanza.
Voglio portare qualche esempio elementare per mostrare che si tratta di una delle tante "leggende metropolitane".

Noi tutti conosciamo i **quadrilateri** e le varie suddivisioni: quadrilateri generici, trapezi, parallelogrammi e, in questo mondo, i rettangoli, i rombi e i quadrati.
Non è sempre stato così.
Il primo a darne definizioni precise è stato Euclide nel suo capolavoro "*Elementi*".

La definizione XXII del primo libro dice:
"Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi".

E' facile vedere le diversità fra le definizioni di Euclide e le nostre.
Noi, per esempio, definiamo i "romboidi" (e li chiamiamo parallelogrammi) facendo intervenire il parallelismo dei lati opposti, mentre Euclide non usa mai tale concetto.
Per noi rettangoli, rombi e quadrati sono particolari parallelogrammi, per Euclide no.
I "trapezi" di Euclide comprendono i nostri trapezi, ma anche tutti i quadrilateri generici e non usa mai il parallelismo dei lati.

Si tratta di definizioni semplici, familiari fin dalla scuola elementare che hanno subito una evoluzione lungo i secoli.
Le nostre definizione riflettono un atteggiamento tipico della matematica moderna: partire da definizioni molto generali per ritrovare all'interno personaggi significativi.
Euclide, invece, aveva, forse, una maggiore preoccupazione didattica che lo portare a classificare i quadrilateri in classi disgiunte e immediatamente riconoscibili.

Tutti noi ricordiamo il **teorema dell'angolo esterno** di un triangolo: "In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ed opposti".
E' la proposizione 16 del primo libro di Euclide. E' un teorema molto importante perché lo si usa nella dimostrazione di diversi altri teoremi fra cui quello che assicura l'esistenza di una parallela per un punto a una retta (proposizione 26 di Euclide).

In una impostazione diversa della stessa geometria euclidea, fondata per esempio sulle trasformazioni geometriche, questo teorema, pur continuando a valere, perde la sua importanza ed è relegato a semplice esercizio o, anche, completamente ignorato.
E' completamente ignorato, per esempio, nel testo "Matematica come scoperta" di Giovanni Prodi, mentre è presentato come "Esercizio svolto" nel testo "Scoprire la matematica" di Prodi e Bastianoni, quaderno "Geometria del piano".

Un ultimo esempio di carattere aritmetico.
Euclide introduce i **numeri perfetti** (numeri che sono uguali alla somma dei loro divisori escluso il numero stesso) e dedica ad essi l'ultimo teorema del libro IX. Segno che per Euclide i numeri perfetti erano il top della teoria dei numeri.
Attualmente i numeri perfetti sono relegati fra le curiosità matematiche e nessuno più se ne interessa.
Interessante, anche a scuola, sarebbe vedere quanti secoli ci hanno messo lo zero e l'uno per essere accettati come numeri, ripercorrere anche la lunga telenovela delle "quantità negative" prima di essere considerati come numeri a tutti gli effetti.

3 – UNA AFFERMAZIONE SCIOCCANTE: IN MATEMATICA NON C'E' NULLA DI ASSOLUTAMENTE CERTO.

Sembra la distruzione di un mito, la dissacrazione di un mostro sacro, ma questa è la realtà.

Precisiamo: non è che in matematica non ci sia niente di certo, niente di vero; non è che in matematica tutto è incerto e tutto è falso; non è che in matematica tutto è opinione mutevole e cangiante a seconda degli interessi o degli umori del momento.

Nella affermazione di prima ciò che va sottolineato è l'avverbio "assolutamente".
La certezza e la "verità", in matematica sono sempre **relative** ai punti di partenza, cioè alle affermazioni (i postulati o assiomi) che vengono assunti e posti a base della teoria.

Facciamo un esempio.
Se domandassimo a una qualunque persona che ha frequentato la scuola media: quanto fa la somma degli angoli interni di un triangolo, otterremmo come risposta corale ed unanime: 180 gradi (i più acculturati risponderebbero: due retti).
Questa risposta è vera sempre, è vera per tutti, è vera in ogni geometria in cui si parla di triangoli?
Certamente no!
Questa risposta è vera in una geometria nella quale vale la proprietà della **unicità della parallela**: dato un punto P ed una retta r è unica la parallela a la retta r passante per P.
Questa geometria è quella chiamata euclidea, quella che tutti noi abbiamo studiato a scuola.
Una conseguenza della unicità della parallela è, per esempio, **l'esistenza di quadrati**, cioè di quadrilateri con quattro lati uguali e quattro angoli retti e **di rettangoli**, cioè di quadrilateri con quattro angoli retti.

Durante il secolo XIX, dopo un travaglio durato due millenni, i matematici hanno inventato un'altra geometria, chiamata "**geometria non euclidea iperbolica**". Come punto di partenza hanno preso gli assiomi di Euclide, completati da Hilbert, tranne l'assioma della unicità della parallela. Al suo posto hanno preso come proposizione **la duplicità della parallela**: dato un punto P ed una retta r per P passano due rette parallele ad r, una per ciascun verso di r.
In questa geometria sono cambiati di poco i punti di partenza, rispetto alla geometria euclidea, ma in essa non sono più vere, cioè sono false, tutte le proposizioni che dipendono dalla unicità della parallela.
Per esempio non è più vera che la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180 gradi. Questa somma è sempre minore di 180 gradi ed è variabile da triangolo a triangolo. Questa somma che non raggiunge mai i 180 gradi, può ridursi a 0 (è quella dei "triangoli limite").
Ancora, in questa geometria **non esistono rettangoli**. Esistono, però, **quadrati** definiti come quadrilateri che hanno quattro lati uguali e quattro angoli uguali che, però, non sono retti.

Durante il secolo XIX i matematici hanno inventato anche un'altra geometria chiamata "**geometria ellittica".** I punti di partenza sono abbastanza complicati e diversi rispetto a quelli della geometria euclidea.
Uno di essi assicura che "**non esistono rette parallele**", cioè dure rette si incontrano sempre in un punto.
Un modello classico di questa geometria è la **geometria della sfera** (la geometria del geoide terrestre).
In essa le rette non sono diritte perché sono i cerchi massimi, cioè cerchi che hanno il centro nel centro della sfera. Due qualunque di queste rette si incontrano in un punto (anzi in due).
In questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di 180 gradi ed è variabile Per convincersene basta pensare ad un triangolo formato da due meridiani e dall'equatore. I meridiani partono dal polo nord e formano fra di loro un certo angolo. A metà strada incontrano l'equatore e ciascuno di essi forma con l'equatore un angolo retto. Il triangolo che nasce ha somma degli angoli interni maggiore di 180 gradi.

Tutti noi siamo convinti che da un punto ad una retta si può condurre una ed una sola **perpendicolare**. Questo è vero nella geometria euclidea ed in quella iperbolica. Nella geometria della sfera le cose cambiano. Ci sono certi punti e certe rette che vanno per la loro strada. Sono i punti e le rette che sono chiamati polo-polare. Qui le perpendicolari sono infinite. Basta pensare, per esempio, al polo nord e all'equatore. Sono polo-polare e le perpendicolari dal polo nord all'equatore sono infinite, cioè tutti i meridiani.

Vediamo anche la classica affermazione cui si attribuisce sempre valore apodittico e inconfutabile e che tutti e sempre sono disposti ad accettare come indiscutibilmente vera: **2 + 2 = 4.**
Essa è certamente vera nella aritmetica elementare, quella che abbiamo studiato fin dalle scuole elementari e che ha come punti di partenza gli assiomi di Peano o qualcosa di equivalente.

Durante il secolo XIX i matematici hanno inventato un'altra aritmetica, chiamata "**aritmetica finita**" che serve per matematizzare fenomeni ciclici come le stagioni, i giorni della settimana, il succedersi dei mesi, ecc.
I punti di partenza di questa aritmetica sono diversi da quelli della aritmetica elementare.
Per esempio i numeri vengono inscatolati in classi e queste classi sono sempre in numero finito.
Nella aritmetica delle stagioni, per esempio, le classi sono quattro e su di esse si definiscono addizione e moltiplicazione che hanno tante belle proprietà.
Ebbene, nella aritmetica delle stagioni abbiamo il risultato inaspettato e sorprendente: **2 + 2 = 0.**
Senza addentrarci troppo negli aspetti matematici possiamo leggere questo risultato nella tabella della addizione che vi propongo.
In essa possiamo interpretare 0 come primavera, 1 come estate, 2 come autunno e 3 come inverno.
La tabella della addizione rispecchia esattamente il susseguirsi delle stagioni.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Un ultimo esempio.
Tutti noi ricordiamo il **criterio di divisione per 2**: un numero naturale è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è 0, o 2, o 4, o 6, o 8.
Questa affermazione è vera sempre, è vera per tutti, è vera qualunque sia la base nella quale scriviamo i numeri? Certamente no!
Essa è vera quando scriviamo i numeri in base dieci, cioè quando usiamo il nostro solito sistema di rappresentazione dei numeri.
Se cambiamo sistema di numerazione questo criterio può diventare falso.
Per esempio, se scriviamo i numeri in tre questo criterio non è più vero.
In base tre il numero 4 si scrive 11, è divisibile per 2, ma non termina con nessuna delle cifre prima ricordate.
Sempre nella stessa base il numero 5 si scrive 12 e non è divisibile per 2.

La conclusione è che in matematica un affermazione può essere vera in una teoria e falsa in un'altra teoria. La verità o la falsità non sono mai assolute, dipendono dai punti di partenza, cioè dagli assiomi che ho messo a base della teoria.

4 – UNA DOMANDA INQUIETANTE: LA MATEMATICA STA IN PIEDI? RIPOSA SU FONDAMENTI SICURI? NON C'E' IL PERICOLO CHE TUTTO L'EDIFICIO CROLLI SOTTO IL PESO DI UNA CONTRADDIZIONE?

Davanti al rigoglioso fiorire della matematica, alla sua pervasività, al suo continuo utilizzo nei più svariati campi del sapere umano, ai suoi innegabili successi anche nel fare previsioni, queste domande possono sembrare retoriche. Invece non lo sono.

I matematici incominciarono a farsi queste domande alla fine del secolo XIX e all'inizio del secolo XX. In quel periodo, infatti, furono scoperte diverse contraddizioni in importanti teorie matematiche. Ricordo, per esempio, " l'antinomia dell'insieme di tutti gli insiemi" (Cantor) e "l'antinomia degli insiemi normali" (Russell) che minavano alla base la teoria degli insiemi di Cantor sulla quale si stava costruendo l'aritmetica (Frege). La situazione era molto spiacevole perché c'era la minaccia di un crollo di tutto l'edificio matematico.
Diversi grandi matematici se ne preoccuparono e si misero al lavoro per cercare dei fondamenti solidi, indiscutibili della matematica, tali non solo da eliminare le antinomie finora scoperte, ma anche da evitare il sorgere di altre antinomie in futuro.
Nacquero, così, diverse scuole fondazionali come il logicismo, l'intuizionismo, il formalismo. Non è il caso di parlarne, ma una cosa è sicura: nessuna riuscì nell'intento.
C'è qualcosa di più: Gödel nel 1930 dimostrò che non si possono trovare i fondamenti della matematica rimanendo all'interno della matematica stessa (è detto molto a spanne).
Dove trovare, allora, questi fondamenti supposto che esistano? Nessuno finora ha trovato la risposta.
Un grande matematico come Hermann Weyl scriveva nel 1940: "Nonostante la nostra disposizione alla penetrazione critica, o forse proprio per causa sua, oggi più di ogni altra epoca siamo incerti sui fondamenti della matematica". E quattro anni dopo: "Il problema dei fondamenti e del significato ultimo della matematica rimane aperto; non sappiamo in quale direzione troveremo la soluzione definitiva e nemmeno se ci si possa aspettare una risposta oggettiva. Può darsi che il "fare matematica" sia una primitiva attività creativa dell'uomo, come il linguaggio e la musica, e che le scelte cui ha portato nel corso della storia sfuggano a ogni tentativo di razionalizzazione completo e oggettivo".

5 – CONCLUSIONE

Scrive Morris Kline: " Il nostro resoconto dello stato della matematica certamente non è confortante. La matematica è stata spogliata della sua verità e non è più un corpo di conoscenza indipendente, sicuro, saldamente fondato" (pag. 382). Non bisogna però trarre delle conclusioni errate.
Sarebbe errato, per esempio, concludere che la matematica è una opinione, mutevole, cangiante e irrilevante come ogni opinione. Una volta fissati i punti di partenza di una teoria, ciò che in essa si deduce in modo rigorosamente logico è sicuro, è vero, è certo.

Sarebbe errato concludere che non è il caso di studiare la matematica dato che non è esclusa la possibilità che l'edificio crolli. Le contraddizioni finora scoperte sono state tutte sistemate ed è ragionevole la speranza di poter operare la stessa cose nel caso se ne scoprissero altre. Intanto nonostante l'incertezza sui suoi fondamenti la matematica continua ad essere di estrema efficacia in tutti i settori delle scienze sperimentali, delle scienze sociali, della tecnologia e, quindi, della nostra vita quotidiana.

Sarebbe errato concludere che si può tranquillamente snobbare la matematica come molti, anche intellettuali, fanno perché "Nel suo aspetto più generale, la matematica è uno spirito, lo spirito della razionalità. E' questo lo spirito che sfida, stimola, rinvigorisce e guida le menti umane al pieno esercizio di se stesse". (M.K. La matematica nella cultura occidentale, pag. 21).

Affido la conclusione, ottimista, alla penna di Morris Kline: "La sua [dell'uomo] maggior conquista, il prodotto della sua ragione, è la matematica. Essa non è una gemma perfetta e neppure la continua opera di raffinamento ne eliminerà tutti i difetti. Purtuttavia, la matematica è stato il legame più efficace con il mondo delle percezioni sensoriali e, per quanto sconcertante sia riconoscere che non possiede un fondamento sicuro, rimane il gioiello più prezioso della mente umana e merita di essere custodito con cura e attenzione. E' stata la punta più avanzata della ragione e senza dubbio continuerà ad esserlo anche se una ricerca più attenta porterà alla luce nuove imperfezioni. Una volta Alfred North Whitehead disse: “Dobbiamo ammettere che la ricerca della matematica è una divina follia dello spirito umano”. Follia, forse; ma divina follia.” (pag. 383-84)