14 Gennaio 2009
SULLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE
Prof. Eugenio Magi

Cosa devono sapere gli allievi:
- **la differenza fra teorema e postulato**
- **la definizione di circonferenza**
- **la definizione di perpendicolarità**
- **le proprietà degli angoli formati da una trasversale con due rette parallele**
- **il valore della somma degli angoli interni di un triangolo e di un poligono**
- **la definizione di sfera e la sezione con piani passanti per il centro**

INTRODUZIONE ALLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Le geometrie non euclidee sono nate dalla critica della geometria scoperta da Euclide.
Sono importanti perché "*distruggono*" la convinzione che gli assiomi di Euclide siano la base fondamentale per permettere di conoscere lo spazio fisico.
Gli " *Elementi* " di Euclide, sono stati
- la prima esposizione organica della geometria,
- l'origine della logica, e dello spirito razionale,
- hanno rappresentato per secoli il modello di ogni scienza;
- sono stati confermati dallo studio della meccanica di Newton.

Le teorie di Euclide sono esposte con *assiomi* e *postulati*, necessari al processo matematico deduttivo.
I Greci consideravano la geometria una scienza di enti astratti dotati di autonoma esistenza.
<u>Postulati ed assiomi sono dimostrati od intuiti?</u>
Da ciò nasce la perplessità sull'evidenza del V postulato che si riferisce *all'infinito* : la sua "verità" non è così evidente! Propongo degli esempi basati sulla prospettiva.
Le nuove geometrie hanno cercato di ovviare a questo inconveniente in tre direzioni diverse :
1. **una diversa definizione del V postulato,**
2. **la sostituzione del V postulato,**
3. **il tentativo di ricavare il V dai quattro postulati precedenti.**

IL QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE

Euclide enuncia il V postulato nel seguente modo :
"*Se una retta, intersecando altre due rette, forma con esse angoli interni da una medesima parte la cui somma è minore di due retti, allora queste due rette, indefinitamente prolungate, finiscono con l'incontrarsi da quella parte*."
Questo enunciato è equivalente a quello comunemente esposto oggi nei corsi di geometria.
Preciso che "gli angoli interni da una medesima parte" sono quelli che noi chiamiamo "angoli coniugati interni ".
L'enunciato più familiare del quinto postulato è il seguente :
Data una retta ed un punto fuori di essa, per tale punto passa <u>una ed una sola</u> retta parallela alla retta data.
L'evidenza di questo quinto postulato, cioè che esso fosse, come affermava Euclide un "*assioma*" cioè una verità indiscutibile, è stata messa in dubbio fin dall'antichità.
I tentativi più significativi sono stati quelli di *Proclo*, di *Vitale Giordano*, ma soprattutto nel Rinascimento quello di *Saccheri*.
Il postulato può essere negato in due modi :
- per un punto esterno alla retta *<u>non passa nessuna retta parallela alla retta data</u>*;
- per un punto esterno alla retta *<u>passano due</u>* e quindi *<u>infinite</u>* rette parallele alla retta data.

Si è cercato, da parte di vari matematici di dimostrare il quinto postulato o di modificarlo con un altro che risultasse più intuitivo.

I TENTATIVI DI DIMOSTRAZIONE DEL V POSTULATO DI EUCLIDE

Il quinto postulato di Euclide ha destato, fino dall'antichità, numerose perplessità perché contiene un'affermazione la cui evidenza non è né immediata né intuitiva.
I dubbi sono da ricercarsi nel fatto che questo postulato fa riferimento a una regione dello spazio, l'infinito, che risulta per noi poco accessibile.
Estrapolare che ciò che vale per il nostro mondo visibile, *finito*, debba valere per l'*infinito* a cui non possiamo accedere, è una affermazione poco intuitiva.
Secondo alcuni storici della matematica – Frajese - lo stesso Euclide aveva dubbi sulla sua intuitività e veridicità.
Tali studiosi ricavano questa deduzione dal fatto che Euclide, come afferma il Frajese "*dopo aver dato 28 proposizioni basate sui primi quattro postulati, deve dare la ventinovesima come postulato, poiché non era riuscito a dimostrarla* ".
Oggi possiamo affermare che Euclide non riuscì a dimostrare la proposizione non per mancanza di mezzi tecnici e scientifici, ma per la difficoltà intrinseca della dimostrazione come hanno evidenziato i tentativi che, nei secoli, si sono succeduti per verificarlo logicamente.
I tentativi sono stati effettuati non solo per via geometrica, ma anche con metodi algebrici o trigonometrici.
Questo soprattutto da parte degli studiosi arabi.
Infatti sia *Ibn-al-Haithan* (965 - 1039) sia *Nadir Eddim al-Tusi* (1201 - 1274) definiscono un quadrilatero trirettangolo (cioè un quadrilatero con tre angoli retti) e partono dall'ipotesi del "*movimento*".
Al-Haitan enuncia la seguente affermazione:
Se un punto si muove nel piano in maniera che la sua distanza da una retta rimanga costante, allora tale punto descrive una retta parallela alla retta data.
Questo enunciato equivale al quinto postulato di Euclide.
Il matematico arabo *Omar Kayyam* (1050 - 1122) critica l'affermazione di al-Haithan in quanto, come affermò, si basa sul "*movimento*" cosa che non era accettata da Aristotele.
Il suo tentativo di dimostrazione del postulato di Euclide si basa su un quadrilatero avente i lati uguali e perpendicolari al terzo lato.
Dimostra che gli altri due angoli risultano fra loro congruenti e si chiede di che tipo essi fossero.
Con un procedimento di esclusione, dopo aver verificato che essi non possono essere né acuti né ottusi, conclude che sono retti.
Dunque il ragionamento si basa ancora sul quadrilatero trirettangolo.
Nello sviluppare tale procedimento si basa sulla affermazione : *due rette convergenti devono incontrasi*
Anche questa proposizione risulta equivalente al quinto postulato di Euclide.
Il tentativo più noto di dimostrazione del quinto postulato è quello del *Saccheri* che aveva conosciuto i tentativi degli studiosi arabi dalla traduzione fatta dal *Wallis* (1616 - 1703) delle opere degli autori sopra citati.

GIOVANNI GIROLAMO SACCHERI 1667 – 1733

Girolamo Saccheri nacque a San Remo il 5 Settembre del 1667 e morì a Milano il 25 Ottobre del 1733.
All'età di diciotto anni entrò come novizio nella Compagnia di Gesù.
Nel periodo in cui visse nel Collegio di Brera, stimolato da padre Ceva, compose l'opera "*Quesita Geometrica"* .
Fu ordinato sacerdote nel 1694 ed insegnò filosofia e teologia nel Collegio dei Gesuiti di Torino.
Nel 1697 pubblicò l'opera *"Logica demonstrativa"* e, nello stesso anno passò ad insegnare al Collegio di Pavia. Nel 1699 il senato milanese gli affidò la cattedra di Matematica che tenne fino alla morte.

Nell'opera *"Euclides ab omni naevo vindicatus"* il Saccheri si occupò del problema relativo alla dimostrazione del quinto postulato di Euclide.
Infatti scrisse :
"Nessun cultore delle scienze matematiche può ignorare quanto sia il pregio e l'eccellenza degli Elementi di Euclide;......... Ciò peraltro non impedì che molti fra gli antichi ed i moderni cultori della geometria non vi trovassero qualcosa da ridire; e infatti si notano tre nei. Il primo riguarda la definizione delle parallele e con essa il postulato V del Libro 1^0 .... Nessuno per certo vi è che dubiti della verità di questo postulato, ma la sola accusa che si muove ad Euclide è di averlo chiamato con il nome di assioma, come se al solo chiamarlo esso riuscisse evidente. ...... Ma poiché gli sforzi degli antichi riuscirono vani a raggiungere l'intento, ne venne che molti esimi geometri a noi più vicini (qui è evidente il riferimento agli studiosi arabi) *ritennero necessaria una nuova definizione di rette parallele; pertanto alla definizione euclidea: <u>"linee rette parallele sono quelle le quali essendo in un medesimo piano, prolungate indefinitamente dall'una o dall'altra parte, non si incontrano mai ",</u> pensarono di sostituire la seguente: "<u> linee rette parallele sono quelle le quali, essendo in un medesimo piano e prolungate indefinitamente sono sempre fra loro equidistanti".</u> Sennonché alcuni, e sono i più acuti, cercarono di provare che esistono linee cosiffatte, ..., altri invece assumono linee rette siffatte come date, e di poi passano senz'altro a dimostrare le rimanenti proposizioni della geometria (non senza peccare gravemente contro la logica .....) "*
Vediamo dunque come Saccheri ha affrontato la dimostrazione del quinto postulato di Euclide.
Egli è partito presupponendo valide le prime ventisette proposizioni di Euclide.
Ha considerato un quadrilatero ABCD i cui lati AC e BD sono uguali e perpendicolari alla base AB.
Saccheri introdusse dunque tre ipotesi sugli angoli del quadrilatero opposti a quelli costruiti retti:

- *Ipotesi dell'angolo retto*: gli angoli sono entrambi retti; ciò equivale ad accettare il V postulato.
- *Ipotesi dell'angolo ottuso*: gli angoli interni sono entrambi ottusi; in questo modo viene negato il V postulato.
- *Ipotesi dell'angolo acuto*: gli angoli interni sono entrambi acuti; anche in questo modo si nega il V postulato

Se una di queste tre ipotesi è vera in un caso allora è vera sempre. Il gesuita ne ha ricavato la seguente proposizione (che numerò con IX)

PROPOSIZIONE IX

nell'ipotesi dell'angolo retto la somma dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo è uguale ad un angolo retto, nell'ipotesi dell'angolo ottuso codesta somma è maggiore di un retto, nell'ipotesi di un angolo acuto è minore.
L'idea di Saccheri era quella di confutare le due ipotesi dell'angolo acuto e di quello ottuso, in modo da rendere possibile solo quella dell'angolo retto.
Confutò l'ipotesi dell'angolo ottuso usando il II postulato euclideo, ammettendo cioè che un segmento possa essere illimitatamente prolungato in linea retta.
Tuttavia rinunciando alla validità anche del II postulato, potremmo considerare valida anche l'ipotesi dell'angolo ottuso: proprio *Riemann*, lavorando su questo, giunse ad elaborare la teoria della <u>*geometria ellittica*</u>.
Saccheri concluse dicendo che
"L'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa, poiché distrugge se stessa".
La confutazione di Saccheri dell'ipotesi dell'angolo acuto è molto più debole.
Egli suppose infatti che ciò che vale per un punto a distanza finita dalla retta dovesse valere anche per un punto *"all'infinito"*, ma questa ipotesi in realtà rende inaccettabile la confutazione.
Non troppo convinto della dimostrazione, Saccheri così chiosò:
"L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta"
Il matematico italiano non si è accorto che ragionando in questo modo ha introdotto un nuovo dato intuitivo cioè <u>l'estensione all'infinito di proprietà valide per le figure a distanza finita</u>.
Nella seconda parte del libro citato il padre gesuita tenta un'altra via per dimostrare assurda l'ipotesi dell'angolo acuto, riprendendo il <u>concetto di equidistanza</u> ma è caduto nuovamente in errore.

Possiamo affermare che il Saccheri non ha raggiunto risultati dalle sue ingegnose investigazioni perché non ha voluto abbandonare il concetto della validità incondizionata della geometria euclidea.

GIOVANNI ENRICO LAMBERT

Giovanni Enrico Lambert è nato a *Mulhouse*, paesino dell'Alsazia che a quel tempo apparteneva alla Svizzera, nel 1728 ed è morto a *Berlino* nel 1777.
Fu, oltre che valido matematico, anche uno dei maggiori pensatori e filosofi dell'Illuminismo tedesco.
Probabilmente conosceva Saccheri: infatti nella sua opera "*Theorie der Parallellinien*"(1766) ha analizzato minutamente l'opera del geometra italiano.
L'opera di Lambert é divisa in tre parti.

- La prima, di natura critica e filosofica sul V postulato,
- La seconda parte espone i vari tentativi della dimostrazione del V postulato
- La terza contiene un sistema di ricerche simili a quelle di Saccheri.

Lambert ragiona sul ***quadrilatero trirettangolo*** e le tre ipotesi riguardano la natura del 4° angolo.
Nella terza ipotesi trova che la somma degli angoli di un triangolo é minore di due angoli retti.
Scopre che la differenza fra due angoli retti e la somma degli angoli di un poligono, é proporzionale all'area dello stesso poligono (*deficienza*)
La misura delle grandezze geometriche è, per Lambert, assoluta cioè non legata alla scelta dell'unità di misura.

ADRIANO MARIA LEGENDRE (1752 - 1833)

Legendre tentò di trasformare il postulato delle parallele in teorema.
Affrontò, come Saccheri, la questione della somma degli angoli di un triangolo che volle dimostrare uguale a due angoli retti.
Ha stabilito che
in qualsiasi triangolo la somma degli angoli é minore od uguale a due angoli retti;
se in un solo triangolo la somma degli angoli é minore od uguale a due angoli retti, é rispettivamente minore od uguale a due angoli retti in ciascun altro triangolo.
In un'altra dimostrazione Legendre utilizza l'ipotesi:
da un punto qualunque preso nell'interno di un angolo si può sempre condurre una retta che incontra i due lati dell'angolo.
Nelle dimostrazioni Legendre ha fatto uso *erroneamente* di grandezze infinite.

KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855)

Ha creduto, per primo, all'esistenza di geometrie che non seguissero l'impostazione euclidea.
Egli ha seguito l'idea del Saccheri, ma è giunto ad una conclusione diversa cioè :
"*possono esistere geometrie diverse da quella di Euclide* "
che egli chiamava antieuclidee
Il matematico tedesco non pubblicò niente sull'argomento, sappiamo dei suoi studi da una lettera del 1829 dove affermò di non voler pubblicare i risultati delle sue ricerche per timore delle "***strida dei beoti***".
Intendeva riferirsi alla reazione dei seguaci della teoria di Kant.
Quando nel 1831 Gauss era intenzionato a pubblicare i suoi studi, ricevette l'opera di Janos Boliay che conteneva conclusioni analoghe a quelle da lui trovate e ne rimase così stupefatto che decise di non sviluppare, in modo autonomo, l'argomento.
JANOS BOLIAY (1802 – 1860) era figlio del matematico Farkas Wolfang Boliay (1775 - 1856) amico di Gauss.
Farkas era rimasto deluso dei tentativi infruttuosi di risolvere il problema del parallelismo, aveva quindi sconsigliato il figlio Janos di avviarsi lungo una via che riteneva senza soluzioni accettabili.
Janos affrontò fino da giovane il problema del quinto postulato pervenendo a risultati positivi che ampliò e approfondì negli anni successivi.

Temeva però il giudizio degli altri matematici e pubblicò i suoi risultati in una appendice di un lavoro didattico del padre.
Questa appendice fu inviata dal padre a Gauss. La lettera del Gauss sulle "*strida dei beoti*" e alcuni problemi familiari, indussero Janos ad abbandonare gli studi, anche perché, nel frattempo, erano state pubblicate le ricerche di Nikolaj Ivanovic Lobacevshij.

NICOLAJ IVANOVIC LOBACEVSKIJ (1793-1856)

Era figlio di un modesto funzionario governativo, è rimasto orfano a sette anni.
Nonostante le difficoltà finanziarie della famiglia, ha studiato *all'Università di Kazan*, dove venne a contatto con ottimi docenti tra cui J. M. Bartels (1769-1830) amico e compaesano di Gauss. Fu educato secondo i principi della matematica tradizionale tedesca che aveva un particolare interesse per la geometria.
A 21 anni era già membro del corpo insegnante e nel 1827 fu nominato rettore *all'Università di Kazan* dove, per tutto il resto della vita, ha svolto attività didattica e amministrativa; gli ultimi suoi anni, però, sono stati amareggiati dalla cecità e dallo scarso interesse suscitato dai suoi lavori.
Nel 1826 il matematico russo ha presentato una memoria dal titolo *"Esposizione succinta dei principi della geometria con una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele"*, andata oggi perduta, all'Università di Kazan che comprendeva una dimostrazione rigorosa del postulato del parallelismo.
Nel 1829 ha nel saggio *"Sui principi della Geometria"* ripreso, nella prima parte, la memoria perduta e ha enunciato una nuova geometria che ha costruito modificando il postulato del parallelismo: è la *geometria non - euclidea iperbolica*.
Negli anni successivi ha pubblicato una serie di memorie e di opere su questo argomento.
Le osservazioni di Lobacevskij vennero accolte con indifferenza dal mondo scientifico contemporanea, anche se la sua carriera di docente non ne subì conseguenze, infatti nel 1842 ottenne la nomina a membro della Società scientifica di Göttingen e di rettore, dell'Università di Kazan.
E' il vero sovvertitore della geometria euclidea; infatti ha evidenziato come essa non fosse quella scienza esatta a cui era consegnato il compito di detenere la verità assoluta.
Il matematico russo tentò di risolvere la questione delle parallele, pensando che la difficoltà da superarsi avesse un fondamento diverso da quello fino ad allora supposto, e affermò, nel 1835, questa convinzione:
"l'infruttuosità dei tentativi, fatti dal tempo di Euclide, per lo spazio di due millenni, svegliò in me il sospetto che nei dati stessi non fosse contenuta ancora la verità che si era voluto dimostrare e che alla conferma sua potessero servire, come pel caso di altre leggi naturali, delle esperienze, ad esempio delle osservazioni astronomiche.
Essendomi convinto finalmente della giustezza della mia congettura ed avendo acquistata l'opinione di aver completamente risolto il difficile quesito, scrissi, nell'anno 1826, una memoria su questo soggetto "Exposition succinte des principes de la geometrie".
Il matematico russo considera valida l'ipotesi degli angoli acuti del Saccheri e sostituisce il V postulato con il seguente:

Data una retta ed un punto fuori di essa per esso passano due (e quindi infinite) rette parallele alla retta data.
L'asserzione era, per Lobacevskij, non più "*evidente*" del V postulato, ma il suo scopo era di osservare le conseguenze logiche di questa sostituzione.
La geometria che ne derivò, fu, come quella di Euclide, priva di contraddizioni logiche. Ne consegue che il V postulato è un'asserzione indimostrabile; può essere accettata o rifiutata.

LA GEOMETRIA NON - EUCLIDEA IPERBOLICA

Seguiamo il ragionamento del matematico russo.
Sulla base dei primi quattro assiomi di Euclide, che egli riteneva ancora validi, si può asserire che da un punto P esterno ad una retta r esiste senza dubbio una retta s che non la incontra.
Per la sua costruzione è sufficiente tracciare da P un segmento PQ perpendicolare alla r e da P la perpendicolare alla retta sostegno del segmento PQ.
La retta s così ottenuta sicuramente non interseca la r, ma, ha affermato Lobacevskij, è davvero essa l'unica?
Conduciamo per P una retta che formi con la retta sostegno di PQ un angolo che "*differisca di poco* " da un angolo retto.
Questa retta non incontrerà sicuramente la r nel foglio sulla quale noi abbiamo rappresentato la nostra immagine "*intuitiva*".
La retta ottenuta dove incontrerà la retta r? Sicuramente ad una distanza non "*ragionevolmente vicina*" per chi ha effettuato il disegno.
L'incontro potrebbe avvenire a miliardi di chilometri o addirittura a miliardi di miliardi di anni luce.
Qualcuno può verificare allora se realmente la retta tracciata incontra la r ? Sicuramente no !
Possiamo allora dividere le infinite rette che passano per P in due categorie ben distinte:
le rette che "intersecano" la r;
le rette che non intersecano la r.
Le rette che intersecano la r a loro volta possono essere distinte in due categorie:
le rette che intersecano la r nel semipiano (diciamo destro) individuato dalla PQ;
le rette che intersecano la r nel semipiano (diciamo sinistro) individuato dalla PQ.
Le due rette, chiamiamole m ed n che separano le due categorie di rette "*incidenti*" e "*non incidenti*" la r si possono considerare entrambe *parallele* alla retta r.
La formulazione originale di Lobacevskij che sostituisce il V postulato di Euclide è:
Dati una retta r ed un punto P fuori di essa, per P passano infinite rette che non incontrano la r: sono tutte quelle comprese fra le rette parallele limite m ed n.
Questo nuovo postulato non risponde alle nostre intuizioni visive, non è la maggiore o minore "*evidenza*" del postulato che ha interessato il ragionamento di Lobacevskij. Voleva osservare le conseguenze, sul piano logico, della sostituzione del V postulato con uno alternativo.
Quali conseguenze comporta questo nuovo postulato? La più evidente conseguenza è il teorema relativo alla somma degli angoli interni di un triangolo che per la geometria di Lobacevskij diviene:
La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.
E' stato naturale verificare questo "fenomeno" di natura puramente fisica. Si è sperimentato su un triangolo astronomico che aveva come vertici: il Sole, la Terra, la stella Sirio.
La somma degli angoli di questo triangolo era molto vicina ad un angolo piatto, risultava quindi più accettabile l'ipotesi euclidea, ma chi garantiva che questo triangolo fosse davvero "*idoneo*" come dimensioni "*infinite*"? D'altra parte Sirio dista "*soltanto*" nove anni luce da noi e non miliardi di miliardi.
Altre conseguenze della geometria di Lobacevskij
Dati due triangoli quello che ha l'area minore ha la somma degli angoli interni maggiore.
La distanza fra due rette parallele non è costante, ma tende a zero da un lato e all'infinito dall'altro.

La geometria di Lobacebskij e quella di Euclide coincidono quando si esamino figure di piccole dimensioni.
Si deve trovare un modello che rappresenti questa geometria, detta *geometria non euclidea iperbolica*.

IL MODELLO DELLA GEOMETRIA NON EUCLIDEA IPERBOLICA

Un modello idoneo alla geometria iperbolica venne creato dal matematico tedesco *Felix Klein* (1849 - 1925)
Klein ideò un modello nel quale, apportando opportune modifiche alle definizioni euclidee di uguaglianza, movimento e lunghezza delle figure piane, soddisfaceva tutti gli assiomi della geometria euclidea escluso il quinto.
Storicamente fu il matematico italiano *Eugenio Beltrami* (1835 - 1900) che creò il primo modello della geometria iperbolica.
Ideò una superficie *pseudosfera* (con curvatura negativa) generata dalla rotazione di una particolare curva, *trattrice*, intorno al proprio asintoto.
Possiamo allora definire :

- <u>piano</u> la parte interna ad un cerchio di raggio "*opportunamente grande*"
- <u>punto</u> ogni punto euclideo appartenente al cerchio (piano)
- <u>retta</u> qualunque corda o segmento appartenente al cerchio.

Le rette GH, CD, EF passano tutte per uno stesso punto P e non hanno nessun punto in comune con la retta AB; perciò da P escono tre rette (se ne possono tracciare infinite) parallele alla retta AB.
Per i punti e le rette del modello del Klein sono validi gli assiomi della geometria euclidea che precedono quello del parallelismo.
Inoltre in questo tipo di geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.
Su questo modello il matematico Henry Poincaré (1854 - 1912) ha ipotizzato un "*nuovo mondo*" che ha chiamato Mondo Σ .

IL MONDO SIGMA DI POINCARE'

Henri Poincaré (1854 - 1912) si è interessato dello studio della geometria *topologica*.
Suggestivo è l'esame del *Mondo Σ* ideato dal matematico francese; in esso la geometria dello spazio non è quella stabilita dai postulati di Euclide, ma è compatibile con le teorie di Boliay e Lobacevskij e presenta tutti i teoremi della geometria di Riemann.
Il "*mondo*" è costituito dai punti interni ad un cerchio di raggio R opportunamente grande.
Poincaré ha immaginato il mondo abitato da esseri *bidimensionali* che sono soggetti a particolari leggi matematico - fisiche

LEGGE PRIMA

La temperatura diminuisce dal centro alla periferia.
La temperatura, espressa in gradi assoluti, cioè secondo la scala Kelvin, ubbidisce alla seguente relazione:
La temperatura di un punto P distante dal centro r è data dal prodotto di una opportuna costante k per la differenza fra il quadrato del raggio della circonferenza ed il quadrato della distanza di P dal centro.

$$T = k (R^2 - r^2)$$

LEGGE SECONDA

Un oggetto posto in un punto assume <u>IMMEDIATAMENTE</u> la temperatura di quel punto.

LEGGE TERZA

Le dimensioni di un corpo sono direttamente proporzionali alla temperatura.
Questo comporta che l'altezza di uno di quegli esseri bidimensionali che vivono nel *mondo Σ* varia secondo la sua distanza dal centro e precisamente diminuisce allontanandosi dal centro.
Lo stesso accade per la lunghezza del suo passo.
Questo comporta che via via che si tende ad avvicinarsi ai "*confini del mondo*" l'altezza ed il passo dell'essere bidimensionale tende a zero.

Un individuo che vive in questo mondo non potrebbe accorgersi della sua diminuzione di altezza perché *tutte* le lunghezze di *tutti* gli oggetti variano con la stessa legge.
Supponiamo che Antonio, uno degli esseri bidimensionali del mondo Σ , desideri fare una passeggiata dal centro alla periferia del suo mondo.
Via via che si allontana dal centro trova zone a temperature più basse e quindi si muoverà con passi sempre più corti.
ESEMPIO: supponiamo che il raggio della circonferenza del mondo Σ sia di 100 passi e che ogni 10 passi la temperatura risulti *un decimo* di quella del centro.
Antonio parte dal centro, fatti 10 passi dista dalla periferia *90 passi*, ma in quel punto il suo passo *si è ridotto di un decimo* e quindi, per raggiungere il "limite del suo mondo" deve fare ancora

90 x 10 = 900 passi.

Si è cioè allontanato dal centro, ma si è anche allontanato dal bordo. Antonio non sarà mai capace di raggiungere il "*confine*" del suo mondo.
Questo "*mondo Σ*" non è un mondo utopistico, nella relatività ristretta di Albert Einstein (1879 - 1955), accade quanto descritto prima.
La teoria della relatività è oggi ormai dimostrata valida da numerosi esperimenti.
All'aumentare della velocità con cui un corpo si muove, cambiano anche le sue dimensioni, in quanto le lunghezze si contraggono ed i tempi si dilatano.

LA GEOMETRIA DI RIEMANN

La geometria di Riemann o ellittica è quella in cui non esistono rette parallele cioè si ammette che per un punto esterno ad una retta passano solo rette che la incontrano.
Non valgono più né il V postulato né le proposizioni ad esso equivalenti.
Bernhard Riemann (1826-1866), era figlio di un pastore protestante, ha vissuto in condizioni modeste ricevendo, però, una ottima educazione prima a Berlino, poi a Gottinga, dove si è laureato con una tesi sulle *funzioni di variabile complessa*.
Nel 1854 divenne docente all'Università di Gottinga e pronunciò la dissertazione di abilitazione dal titolo *"Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria"* con evidente riferimento alla storia della matematica
Numerosi eventi dolorosi lo hanno coinvolto sin dalla prima infanzia ed anche in campo matematico il suo destino è stato quello di essere ben presto dimenticato e il suo nome non è comparso nei manuali sino al 1890.
Nella pubblicazione, 1867, dei risultati raggiunti apportò una fondamentale distinzione tra *illimitatezza* e *infinità*, considerando la prima un concetto qualitativo, mentre la seconda un concetto relativo alla misura.
Nella cultura moderna, i due termini sono considerati come sinonimi.
L'affermazione latina e la concezione pitagorica di spazio infinito sono, per Riemann, indubbiamente errate.
Infatti, secondo Riemann, vi è stata un'errata utilizzazione del termine *infinito*.
Lo spazio euclideo era illimitato e infinito, mentre per Riemann è *illimitato e finito*.
Non esistono *linee di lunghezza infinita* e non vale più il secondo postulato di Euclide, che viene sostituito con la concezione di una *linea illimitata ma di lunghezza finita*.
Anche il V postulato è ritenuto da Riemann errato.

LA COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA ELLITTICA DI RIEMANN

Il matematico tedesco, considerò una retta r ed un punto P esterno ad essa.
Unì il punto P con i punti Q e R, che appartenevano alla retta r.
Suppose che Q si muovesse verso destra e che R si muovesse verso sinistra, poiché la linea retta risultava finita, i punti R e Q finivano per incontrarsi, dopo aver percorso una distanza finita e le rette PR e PQ non si distaccheranno mai da r.
La conclusione di Riemann fu che due rette del piano si incontravano sempre: non esistevano rette parallele.
Il postulato del parallelismo era allora enunciato da Riemann nel seguente modo

Data una retta ed un punto fuori di essa, per tale punto non passa nessuna retta parallela alla retta data.
La teoria sviluppata su queste premesse comporta come deduzione i seguenti teoremi:
Tutte le perpendicolari ad una stessa retta si incontrano in un punto.
La conclusione a cui approda Riemann è logicamente coerente al pari delle teorie di Euclide, Boliay e Lobacevskij.
A differenza degli altri studiosi, il matematico tedesco formula una serie di teoremi che si distaccano completamente dai modelli precedenti.
Anche questa teoria, nelle condizioni in cui le distanze sono piccole, fornisce risultati analoghi a quelli euclidei.

IL MODELLO DELLA GEOMETRIA NON EUCLIDEA ELLITTICA

Il Riemann, avendo modificato gli usuali termini geometrici, ha costruito un proprio modello geometrico che illustrasse, intuitivamente, la nuova geometria.
Ha considerato una sfera la cui forma era simile alla Terra, ha considerato una piccola porzione e ha chiamato:

- *segmento di retta* la linea di minima distanza tra due punti su di essa (geodetica).

A tale linea, che unisce due punti, corrisponde l'arco minore della circonferenza che passa per i due punti ed ha centro nella sfera, perché appartiene a circonferenze massime.
Il matematico tedesco considerava la metà di una superficie sferica, le geodetiche potevano essere considerate *rette* e godevano delle seguenti proprietà euclidee:

a) per ogni punto passano infinite rette;
b) per due punti distinti passa una e una sola retta.

Tuttavia, il V postulato non ha valore in questo modello, in quanto assegnata una retta e un punto esterno ad essa, ogni retta per quel punto interseca la retta data
Il Riemann ha così identificato gli elementi

- *Piano* la superficie di una sfera il cui raggio fosse opportunamente grande;
- *punto* una coppia di punti della sfera diametralmente opposti;
- *retta* un qualsiasi cerchio massimo della sfera

In questa geometria le *rette*, cioè i cerchi massimi, hanno lunghezza finita, mentre nella geometria euclidea esse hanno lunghezza infinita.
Un'altra conseguenza di questo tipo di geometria è che:
nella geometria ellittica non esistono triangoli simili.
Infatti l'uguaglianza degli angoli comporta l'uguaglianza dei lati e quindi l'uguaglianza dei triangoli.

MAURITS CORNELIS ESCHER

Le nuove geometrie hanno ispirato anche artisti come l'olandese Maurits Cornelis Escher
Egli ha avuto il maggior successo nel considerare temi matematici come soggetto delle sue opere.
L'incisore si è basato sul mondo Σ di Poincaré creando delle bellissime opere d'arte.
E' nato nel 1898 a Leewarden nei Paesi Bassi e ha trascorso gran parte della sua giovinezza nella città di Arnhem.
Già quando frequentava, in questa città, le scuole secondarie, ha evidenziato una particolare predisposizione per il disegno.
E' stato incoraggiato a potenziare questa sua dote e gli è stata insegnata l'arte dell'incisione.
Dopo le scuole secondarie si recò ad Haarlem per studiare architettura.
Samuel Jasserun de Mesquita si rese conto delle doti del giovane e del fatto che gli studi architettonici non lo soddisfacevano.
Lo ha consigliato pertanto di proseguire la sua formazione nella sua scuola che ha frequentato dal 1919 al 1922.
Conclusi gli studi Escher ha effettuato molti viaggi soprattutto in Italia.
Nella primavera del 1922 ha visitato l'Italia e, nell'autunno, anche la Spagna.

Si è trasferito a Roma dove ha vissuto dal 1923 al 1935 insieme alla moglie che aveva conosciuto a Ravello.
Ha effettuato, in questo periodo, numerose escursioni a piedi negli Abruzzi, in Campania, in Sicilia, in Corsica e a Malta.
Sono di questo periodo le prime incisioni su legno di paesaggi italiani.
Il pittore ha effettuato, durante i viaggi, dei disegni da cui poi ha ricavato, durante l'inverno, le incisioni.
L'ascesa del fascismo ha reso più difficile la permanenza a Roma di Escher al punto che, nel 1935, si è trasferito in Svizzera.
Il paesaggio svizzero, perennemente invernale e nevoso, non lo ha ispirato quanto il mare dell'Italia.
Per questo dal maggio alla fine di giugno del 1936 il pittore olandese ha effettuato quello che poi è risultato l'ultimo dei sui viaggi di studio.
Si è imbarcato su una nave mercantile ed ha costeggiato le coste sia italiane che spagnole.
Nel corso di questo viaggio ha disegnato copie dettagliate dei mosaici moreschi dell'Alhambra di Cordoba.
Escher si è trasferito nel 1937 a Ukkel, vicino a Bruxelles, è tornato poi nei Paesi Bassi nel 1941, fino a trasferirsi, definitivamente, a Laren, nell'Olanda del Nord, dove è morto il 27 marzo del 1972.
Per quello che interessa il rapporto fra Escher e le geometrie non euclidee osserviamo il rapporto dello xilografo con l'infinito.
Affascinato dall'idea del "*senza spazio*" cioè del nulla che non era la stessa cosa del vuoto, in quanto quest'ultimo è immaginale ma va al di là delle nostre capacità di rappresentazione e conoscenza,
Escher si è dichiarato spinto da un impulso irrazionale a rappresentare l'infinito.
Il primo problema che si è posto riguarda le forme artistiche da dover utilizzare nella divisione del piano.
Tutte le forme che sono percepite sono segni, simboli della materia che ci circonda.
Tutti i tentativi di rappresentazione dell'infinito presuppongono uno studio della figura, posta su un piano ideale infinitamente grande, che aumentando di dimensioni veniva riprodotta un numero infinito di volte.
E' l'idea della musica "*ossessiva*" del Bolero di Ravel.
I primi tentativi di Escher su una superficie non curva si sono fondati su una *costante riduzione radiale*, questo ha significato la riduzione delle dimensioni nella direzione del raggio.
Questa idea, legata a figure non curvilinee, ha seguito lo schema di natura circolare che partendo dai bordi giungeva fino al punto centrale nel quale cadeva il limite fra *l'infinitamente grande* e *l'infinitamente piccolo*.
Il merito di Escher è quello di aver concepito l'infinito dentro una linea logica di confine (il mondo Σ di Pincaré).
La ricerca di strutture che permettevano rappresentazione della superficie illimitata di una parte limitata di piano, è approdato, per opera di Escher, ad un avvicinamento "*a rovescio*" delle opere eseguite in precedenza.
Le forme più estese erano poste nel centro o alla periferia della composizione per raggiungere il limite dell'infinitamente piccolo sul limite della circonferenza o nel centro della figura.
Un esempio di quanto esposto si ha nell'opera "*Limite del quadrato".*
Osserviamo la composizione *Sentiero di vita II*
Per la sua costruzione vengono utilizzate due spirali che si originano in due punti diversi giacenti sulla circonferenza e collegati fra loro.
Seguendo il percorso di una spirale è possibile raggiungere il centro partendo dal margine più esterno, e da qui ritornare, seguendo l'altra spirale, al centro della circonferenza fino ad incontrare di nuovo la prima spirale.
In termini geometrici rigorosi questo vuol dire che fra l'angolo che descrive la semiretta ruotando di un angolo giro e la distanza OP sussiste una proporzionalità inversa.

Se si usa il logaritmo della distanza e non la semplice distanza, è possibile lavorare con un numero fisso.
La spirale logaritmica è soddisfatta dall'equazione :

$$\ln OP = a \cdot F$$

dove il logaritmo è quello naturale.
Se a > 0 la spirale si allontana indefinitamente con spire *sempre più larghe*.
Se a < 0 la spirale si restringerà indefinitamente verso il centro O con *spire sempre più piccole*.
Se a = 0 allora OP è un *punto*.
Dall'osservazione degli studi del professor Coxeter sulla geometria iperbolica sono nate le idee delle xilografie *Limite del cerchio I - II - III* e *Serpenti*.
La geometria iperbolica assumendo come piano un cerchio e considerando come retta una qualunque corda del cerchio, ammette, contrariamente alle geometrie euclidee, due rette parallele passanti per un punto.
Sotto questo aspetto la composizione meglio riuscita di Escher è *Limite del cerchio III*
La differenza fra questa composizione e le altre consiste nel fatto che gli archi di circonferenza, aventi un raggio sempre minore avvicinandosi al margine esterno, non s'incontrano necessariamente ad angolo retto.
I triangoli che si ottengono sono quelli della geometria ellittica di Riemann.
Grazie a questa struttura nessun pesce, che si muove lungo un binario circolare. riuscirà a raggiungere mai il confine del suo "mondo" come avviene nel "*mondo Σ*" di Poincaré.
I pesci si incontrano in tre modi diversi:

- una prima volta si toccano 4 pinne di 4 pesci diversi (caso a);
- una seconda volta si toccano 4 teste e 4 code (caso b);
- una terza volta si incontrano 3 pinne (caso c).

Nella composizione *Limite del cerchio III* Escher non ripete il tentativo di procedere con anelli piccoli fino a che questi non scomparivano nelle "fitte nebbie" di figure piccole all'infinito.
Il progetto è diverso: partendo dal centro dell'anello prendono l'avvio dei piccoli anelli per crescere all'infinito fino a raggiungere la loro massima misura e poi diventare, ai "limiti" cioè ai margini di nuovo piccoli.
Presento infine altre xilografie di Escher
Un primo esempio di falsare la prospettiva
Altro esempio di falsare la prospettiva
Altro esempio di falsare la prospettiva
Un esempio di figura topologica con le formiche che passano continuamente dal dentro al fuori.

CONCLUSIONI

Ma allora ….. quale è la vera geometria che consente di dare una corretta descrizione dello spazio fisico?
Verso la fine dell'Ottocento, alcuni studiosi hanno concluso, in maniera non del tutto corretta, che la "verità" delle tre geometrie portava al crollo del principio del terzo escluso e, quindi, non teneva conto della logica classica.
Si può, invece, affermare che le tre geometrie risultano contemporaneamente vere, considerando come verità una nozione relativa ai concetti a cui è riferita e al suo contesto.
Le nuove geometrie non prendono in esame il mondo e gli enti euclidei e, pertanto, esaminano oggetti diversi.
Infine, l'analisi delle proprietà dello spazio fisico comporta un esame del rapporto tra esperienza e geometria.
Con le geometrie non euclidee si abbandona la descrizione dello spazio attraverso la speculazione filosofica e si passa ad un tipo di analisi empirica.
Nonostante siano state tentate numerose dimostrazioni sperimentali dei principi delle nuove geometrie, non è possibile giungere alla conclusione che la geometria dello spazio non sia euclidea, in quanto le misure fisiche implicano un ingente numero di ipotesi, introducendo, così, una vasta gamma di interpretazioni possibili.

Si può, quindi, accettare l'equivalenza logica delle tre geometrie che propongono risultati contrastanti, riferibili, però, a "*mondi*" del tutto diversi.
Non siamo in grado di considerare vera una specifica geometria né intuitivamente, né logicamente, né, tanto meno, empiricamente.
La scelta può, dunque, derivare da una maggiore semplicità nel descrivere lo spazio fisico, in quanto, come dice Poincaré.
non esistono geometrie più o meno vere, ma soltanto geometrie più o meno comode.

E DIDATTICAMENTE?

Sicuramente l'argomento dovrà essere trattato nell'ultimo anno della scuola Media Superiore.
Personalmente consiglio, se è possibile, di abbinarlo alla teoria della relatività ristretta di Einstein.
Ideale sarebbe un lavoro interdisciplinare - da programmare all'inizio dell'anno scolastico - con i colleghi di Filosofia e di Storia dell'Arte o Disegno
Utilizzarlo per tesine, svolte anche sotto l'aspetto multimediale, per l'esame di stato, in collaborazione, oltre che con i docenti detti sopra anche con quello di Italiano (legandolo, per esempio, a Pirandello).
Ritengo che la creatività dei docenti e dei discenti permetta un serio e valido lavoro multi - pluri - disciplinare.
Per chi vuole utilizzare questo argomento, auguro BUON LAVORO che non sarà disgiunto da UNA GRANDE FATICA !!!!!!.