

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

# I misteri di indipendenza e probabilità condizionate

Alberto Gandolfi  
Università di Firenze  
Seminario Mathesis

November 7, 2012

## 1 Definizione di probabilità

## 2 Indipendenza

## 3 Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

## 4 Probabilità condizionate

## 5 Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

## 6 Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

## 7 Conclusioni

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi  
con Reins.  
Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi  
senza Reins.  
Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti  
Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio  
Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Definizione di probabilità

Dati un insieme di riferimento  $S$  ed una famiglia di sottinsiemi  $\mathcal{A}$  detti eventi

la probabilità  $P$  è una funzione su  $\mathcal{A}$  tale che

- $0 \leq P(A) \leq 100\%$
- $P(S) = 100\%$
- $A_i$  disgiunti,  $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$  (per famiglie finite o numerabili)

Per comodità si usa "1" al posto di 100%

## Commenti

È la formalizzazione generalmente utilizzata.

Si possono calcolare probabilità tramite conteggio, teorema di inclusione esclusione, complementazione ecc.

ma matematicamente si tratta finora di **reinterpretazioni di risultati di analisi.**

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi  
con Reins.

Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi  
senza Reins.

Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio

Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Osservazione 1: nel mondo reale vi sono eventi indipendenti.

Osservazione 2: talvolta nel mondo reale si ha un'informazione parziale sugli eventi già realizzati.

Formalizzazione del concetto di indipendenza all'interno della teoria:

Indipendenza

Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti (per  $P$ ) se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Osservazione 1: nel mondo reale vi sono eventi indipendenti.  
Osservazione 2: talvolta nel mondo reale si ha un'informazione parziale sugli eventi già realizzati.

Formalizzazione del concetto di indipendenza all'interno della teoria:

Indipendenza

Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti (per  $P$ ) se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Osservazione 1: nel mondo reale vi sono eventi indipendenti.  
Osservazione 2: talvolta nel mondo reale si ha un'informazione parziale sugli eventi già realizzati.  
Formalizzazione del concetto di indipendenza all'interno della teoria:

### Indipendenza

Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti (per  $P$ ) se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi con Reins.

Es. Tirasegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi senza Reins.

Es. Tirasegno all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Osservazione 1: nel mondo reale vi sono eventi indipendenti.  
Osservazione 2: talvolta nel mondo reale si ha un'informazione parziale sugli eventi già realizzati.  
Formalizzazione del concetto di indipendenza all'interno della teoria:

## Indipendenza

Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti (per  $P$ ) se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definizione di probabilità

## Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

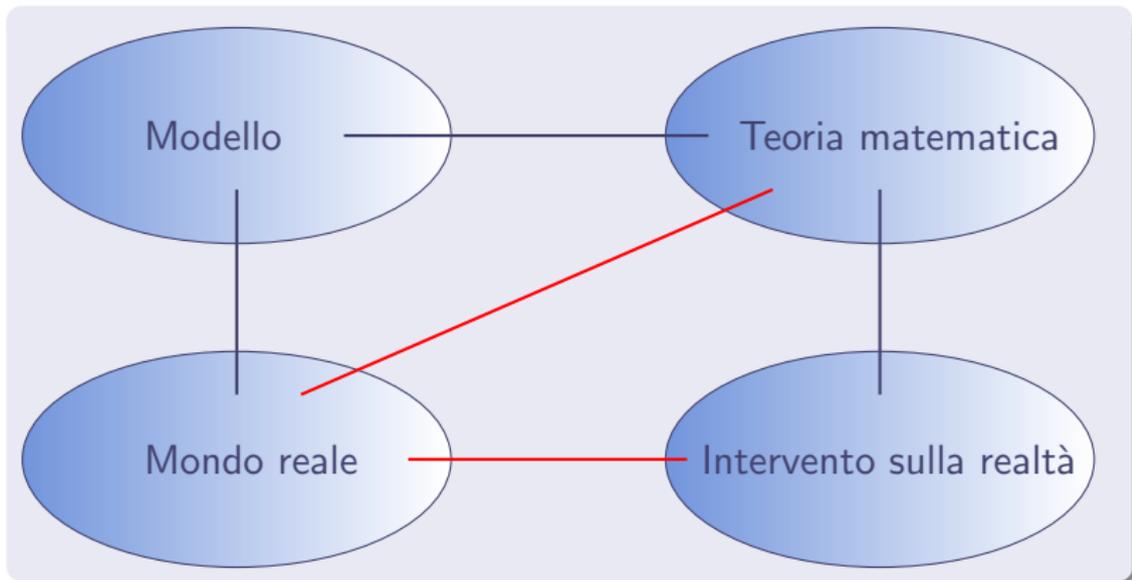
Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni



Definizione di probabilità

## Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

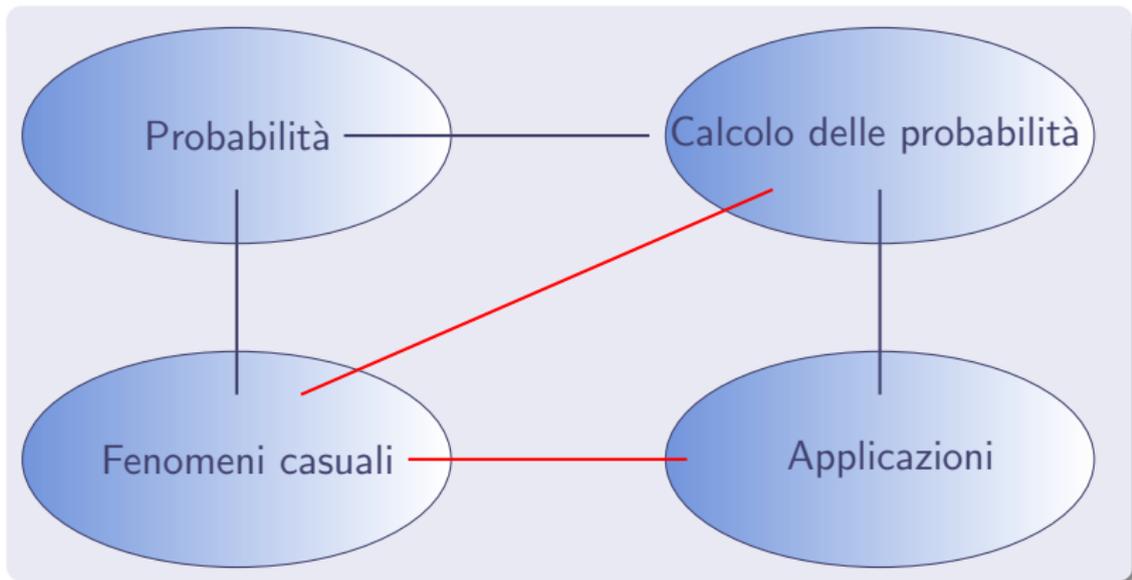
Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni



Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Una volta data una definizione l'intuizione si può usare solo guidata dallo sviluppo della teoria:

### Teoria 1: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$ , sarà indipendente anche da  $B^c$ ? SI',  
da semplice verifica.

### Teoria 2: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$  e da  $C$ , sarà indipendente anche da  
 $B \cup C$ ? NO, per esempio non vale (tranne casi banali) se  
 $A \cap B = A \cap C$ .

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Una volta data una definizione l'intuizione si può usare solo guidata dallo sviluppo della teoria:

### Teoria 1: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$ , sarà indipendente anche da  $B^c$ ? SI',  
da semplice verifica.

### Teoria 2: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$  e da  $C$ , sarà indipendente anche da  
 $B \cup C$ ? NO, per esempio non vale (tranne casi banali) se  
 $A \cap B = A \cap C$ .

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Una volta data una definizione l'intuizione si può usare solo guidata dallo sviluppo della teoria:

### Teoria 1: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$ , sarà indipendente anche da  $B^c$ ? SI',  
da semplice verifica.

### Teoria 2: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$  e da  $C$ , sarà indipendente anche da  
 $B \cup C$ ? NO, per esempio non vale (tranne casi banali) se  
 $A \cap B = A \cap C$ .

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Una volta data una definizione l'intuizione si può usare solo guidata dallo sviluppo della teoria:

### Teoria 1: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$ , sarà indipendente anche da  $B^c$ ? SI', da semplice verifica.

### Teoria 2: deduzioni dall'indipendenza

se  $A$  è indipendente da  $B$  e da  $C$ , sarà indipendente anche da  $B \cup C$ ? NO, per esempio non vale (tranne casi banali) se  $A \cap B = A \cap C$ .

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi  
con Reins.

Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi  
senza Reins.

Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio

Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Esempio. Assi e Cuori su 52 carte

Estraendo una carta da un mazzo di 52 carte gli eventi

$A =$  Estrarre un asso e  $C =$  Estrarre un cuori

sono indipendenti,

infatti  $P(A) = \frac{4}{52}$ ,  $P(C) = \frac{13}{52}$  e  $P(A \cap C) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \frac{13}{52}$

## Esempio. Assi e Cuori su 54 carte

Invece estraendo una carta da un mazzo di 54 carte gli eventi

$A =$  Estrarre un asso e  $C =$  Estrarre un cuori

**non** sono indipendenti,

infatti  $P(A) = \frac{4}{54}$ ,  $P(C) = \frac{13}{54}$  e  $P(A \cap C) = \frac{1}{54} \neq \frac{4}{54} \frac{13}{54}$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi  
con Reins.

Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi  
senza Reins.

Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti  
TFA: altro figlio  
maschio

Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Esempio. Assi e Cuori su 52 carte

Estraendo una carta da un mazzo di 52 carte gli eventi

$A =$  Estrarre un asso e  $C =$  Estrarre un cuori

sono indipendenti,

infatti  $P(A) = \frac{4}{52}$ ,  $P(C) = \frac{13}{52}$  e  $P(A \cap C) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \frac{13}{52}$

## Esempio. Assi e Cuori su 54 carte

Invece estraendo una carta da un mazzo di 54 carte gli eventi

$A =$  Estrarre un asso e  $C =$  Estrarre un cuori

**non** sono indipendenti,

infatti  $P(A) = \frac{4}{54}$ ,  $P(C) = \frac{13}{54}$  e  $P(A \cap C) = \frac{1}{54} \neq \frac{4}{54} \frac{13}{54}$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi  
con Reins.

Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi  
senza Reins.

Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio

Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Senso opposto

ricavare  $P(A \cap B)$  da  $P(A)$ ,  $P(B)$  e indipendenza:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

### Esempio. Due Assi con Reinserimento

Sorteggiando due carte con reinserimento,

se  $A_i =$  Uscita di un asso al sorteggio  $i$

siccome  $P(A_1) = P(A_2) = \frac{4}{52}$  e le estrazioni sono indipendenti

$$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{4}{52}\right)^2$$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi  
con Reins.

**Es. Tirassegno  
al coperto**

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi  
senza Reins.

Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti  
Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio

Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Esempio. Tirassegno al coperto

Probabilità di successo al tirassegno,  
 $C =$  Fare centro al chiuso  $R =$  Piove  
stimiamo  $P(C) = 80\%$  e  $P(R) = 30\%$   
poiché i due eventi sono indipendenti

$$\begin{aligned} P(\text{ Sia un giorno di pioggia e si faccia centro } ) &= P(R \cap C) \\ &= 24\% \end{aligned}$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Probabilità condizionata

È ragionevole importare nella teoria la nozione di probabilità condizionata di un evento  $A$  dato un altro  $B$  (tale che  $P(B) \neq 0$ ), come una nuova quantità

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

## Teoria

Le probabilità condizionate generalizzano l'indipendenza, che può essere definita come

$$P(A|B) = P(A).$$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori**
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Esempio. Pari e Cuori

Da un mazzo di 52 carte

$Q$  = Estrarre un pari e  $C$  = Estrarre un cuori

$$\begin{aligned} P(\text{che sia un pari} \mid \text{ho estratto un cuori}) &= P(Q|C) \\ &= \frac{P(Q \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{6}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{6}{13}, \end{aligned}$$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Senso opposto

posso ricavare  $P(A \cap B)$  da  $P(A|B)$  e  $P(B)$ :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

### Esempio. Due Assi senza Reinserimento

Sorteggiando due carte senza reinserimento,

se  $A_i =$  Uscita di un asso al sorteggio  $i$

siccome  $P(A_1) = \frac{4}{52}$  e  $P(A_2|A_1) = \frac{3}{51}$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Esempio. Tirassegno all'aperto

Se

$C' =$  Fare centro all'aperto e  $R =$  Piove  
e se stimiamo  $P(C'|R) = 60\%$  e  $P(R) = 30\%$

$$\begin{aligned} P(\text{ Sia un giorno di pioggia e si faccia centro all'aperto}) \\ &= P(R \cap C') \\ &= P(C'|R)P(R) = 18\% \end{aligned}$$

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi  
con Reins.  
Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi  
senza Reins.  
Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti  
Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio  
Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Es. Produzione al Cantiere, da Ang e Tang, Probability concepts in Engineering

- $E_1 = \{\text{non piove}\}$
- $E_2 = \{\text{posso produrre in loco}\}$
- $E_3 = \{\text{ho una fornitura esterna}\}$

$P(E_1) = 0.8$ ,  $P(E_2) = 0.7$ ,  $P(E_3) = 0.95$ ,  $P(E_3|E_2^c) = 0.6$ ,

$A = \{\text{si produce, in loco o dall'esterno}\}$ ,

$P(A|E_1^c) = 0$ ;

$E_2, E_3$  indipendenti da  $E_1$ .

Si chiede  $P(A)$ .

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Ora,  $A = E_1 \cap (E_2 \cup E_3)$ .

Sono indipendenti  $E_1$  e  $(E_2 \cup E_3)$ ? Abbiamo visto che se  $E_1$  è indipendente da  $E_2$  e da  $E_3$  separatamente, come sembra dal testo, questo non implica indipendenza dall'unione.

Supponiamo allora che il testo intendesse  $E_1$  e  $(E_2 \cup E_3)$  indipendenti. In tal caso

$$P(A) = P(E_1)P(E_2 \cup E_3).$$

Inoltre,  $E_2 \cup E_3 = E_2 \cup (E_2^c \cap E_3)$ , per cui

$$P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_2^c \cap E_3) = 0.7 + 0.18 = 0.88$$

e

$$P(A) = 0.8 \times 0.88 = 0.704.$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Dubbio

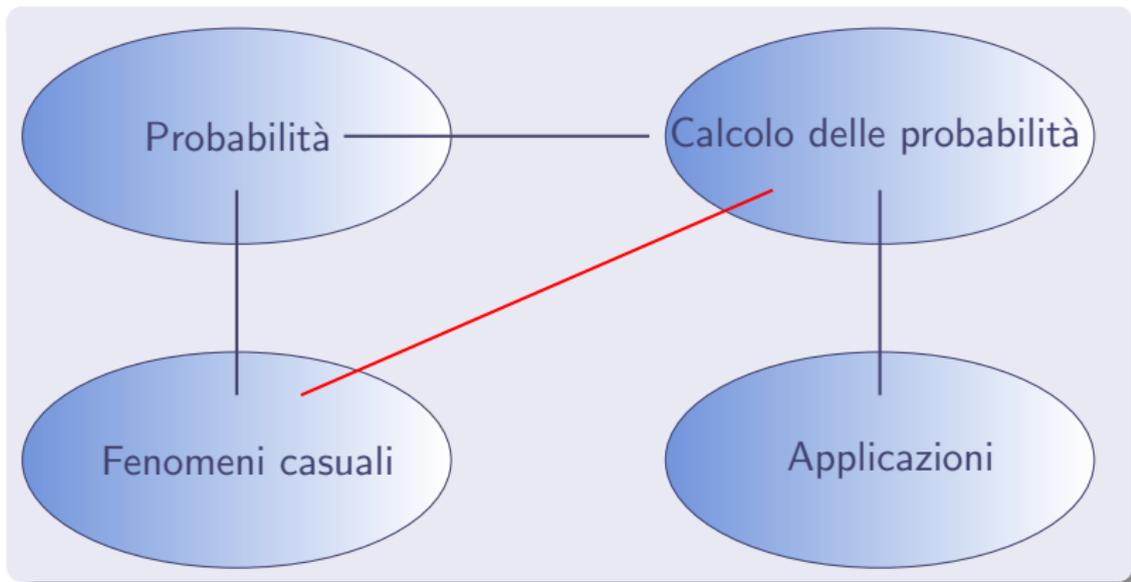
Ma non si era detto che indipendenza vuol dire  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ? Com'è possibile che si sapesse già dell'indipendenza senza verificarla? Senza calcolare  $P(A \cap B)$ ?

## Dubbio

Ma non si era detto che la probabilità condizionata si calcola come rapporto  $P(A|B) = P(A \cap B)P(B)$ ? Com'è possibile che si sapesse già il valore senza calcolarlo ?

Apparente differenza tra gli esempi delle carte e quelli del tirassegno.

Abbiamo percorso la direzione rossa!!!



Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi con Reins.  
Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi senza Reins.  
Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio  
Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Forse tutte le osservazioni sulle procedure matematiche  
potrebbero essere solo un eccesso di zelo...

Problema nell'Es. Produzione al Cantiere

Succede però che

$$\begin{aligned}P(E_2 \cap E_3) &= P(E_3) - P(E_2^c \cap E_3) \\ &= 0.95 - 0.18 = 0.77 > 0.7 = P(E_2)\end{aligned}$$

che è impossibile!!

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

Forse tutte le osservazioni sulle procedure matematiche  
potrebbero essere solo un eccesso di zelo...

## Problema nell'Es. Produzione al Cantiere

Succede però che

$$\begin{aligned}P(E_2 \cap E_3) &= P(E_3) - P(E_2^c \cap E_3) \\ &= 0.95 - 0.18 = 0.77 > 0.7 = P(E_2)\end{aligned}$$

che è impossibile!!

## Cosa sta succedendo?

Un problema del genere l'aveva già avuto Hilbert:



VI problema al secondo congresso internazionale dei matematici l'8 agosto 1900:

In view of our studies of the foundations of geometry, we are led to the problem of treating those subjects of physics axiomatically, in which mathematics already plays an important part now.

We name in the first place probability theory and mechanics.

With respect to the axioms of probability theory it seems desirable to combine their logical study with a satisfactory treatment of the method of mean values in mathematical physics, in particular in the kinetic theory of gases.

Hilbert cita un lavoro di Bohlmann che contiene assiomi che partono dalle probabilità condizionate.

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Cosa sta succedendo?

Un problema del genere l'aveva già avuto Hilbert:



VI problema al secondo congresso internazionale dei matematici l'8 agosto 1900:

In view of our studies of the foundations of geometry, we are led to the problem of treating those subjects of physics axiomatically, in which mathematics already plays an important part now.

We name in the first place probability theory and mechanics. With respect to the axioms of probability theory it seems desirable to combine their logical study with a satisfactory treatment of the method of mean values in mathematical physics, in particular in the kinetic theory of gases. Hilbert cita un lavoro di Bohlmann che contiene assiomi che partono dalle probabilità condizionate.

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Assiomatica di Bohlmann

- Definition 1: The probability of the happening of an event  $E$  is a positive proper fraction  $p(E)$  associated to  $E$ .
- Definition 2: Two events  $E_1$  and  $E_2$  are called incompatible if the probability that both of them happen is 0.
- Axiom 1: If  $E$  is certain, then  $p(E) = 1$ , if  $E$  is impossible, then  $p(E) = 0$ .
- Axiom 2: If two events  $E_1$  and  $E_2$  are incompatible, the probability of the event  $E$  that  $E_1$  or  $E_2$  happen is  $p(E_1) + p(E_2)$ .
- Axiom 3: If  $p_2$  is the probability that  $E_2$  happens, provided it is known that  $E_1$  happens, then the probability of the event  $E$  that  $E_1$  and  $E_2$  happen is  $p(E) = p(E_1)p_2$ .
- Definition 3:  $E_1$  and  $E_2$  are called independent if  $p(E) = p(E_1)p(E_2)$ .

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi con Reins.  
Es. Tirasegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi senza Reins.  
Es. Tirasegno all'aperto

Commenti

Commenti  
Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio  
Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Hilbert, seminario del 1905

sull'assiomatica di Bohlmann

"at this stage of the development it is not clear yet which statements are definitions and which statements are axioms"

## Kolmogorov 1933



Assiomatica basata su  $\mathcal{A}$   
 $\sigma$ -algebra e  $P$  una misura  
 $\sigma$ -additiva normalizzata.

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

La teoria funziona e si dimostrano molti risultati, tra cui il teorema centrale del limite tuttavia non giustifica l'uso inverso di indipendenza e probabilità condizionate nelle applicazioni:  
  
siamo ancora al problema di Hilbert.

## Un'ipotesi storica

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni



Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Proposta di soluzione

La soluzione di questi errori viene dalla comprensione della modellizzazione:

non serve "il modello" che rappresenta la situazione reale, ma "un modello" non contraddittorio\* che la approssima

\* dal teorema di Gödel questo può essere garantito solo relativamente.

La soluzione è quindi un teorema di esistenza:

basta che esistano un insieme  $S$ , una probabilità  $P$  ed eventi che soddisfano le ipotesi richieste.

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Proposta di soluzione

La soluzione di questi errori viene dalla comprensione della modellizzazione:

non serve "il modello" che rappresenta la situazione reale, ma "un modello" non contraddittorio\* che la approssima

\* dal teorema di Gödel questo può essere garantito solo relativamente.

La soluzione è quindi un teorema di esistenza:

basta che esistano un insieme  $S$ , una probabilità  $P$  ed eventi che soddisfano le ipotesi richieste.

## Soluzione per l'indipendenza di eventi

Risultato generale.

Una collezione  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  insieme arbitrario di indici, di eventi si dice collettivamente indipendenti se per ogni sottinsieme finito  $J \subseteq I$

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

### Teorema

*Comunque assegnati  $I$  e  $\{p_i\}_{i \in I}$  esiste sempre uno spazio di probabilità  $(S, \mathcal{A}, P)$  ed eventi  $\{A_i\}_{i \in I}$  che sono indipendenti e  $P(A_i) = p_i$ .*

Si prende lo spazio prodotto  $S = \prod_{i \in I} \{0, 1\}$ . Se  $I$  è finito è una verifica diretta, altrimenti si applica il teorema di estensione di Kolmogorov.

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per l'indipendenza di eventi

Risultato generale.

Una collezione  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  insieme arbitrario di indici, di eventi si dice collettivamente indipendenti se per ogni sottinsieme finito  $J \subseteq I$

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

### Teorema

*Comunque assegnati  $I$  e  $\{p_i\}_{i \in I}$  esiste sempre uno spazio di probabilità  $(S, \mathcal{A}, P)$  ed eventi  $\{A_i\}_{i \in I}$  che sono indipendenti e  $P(A_i) = p_i$ .*

*Si prende lo spazio prodotto  $S = \prod_{i \in I} \{0, 1\}$ . Se  $I$  è finito è una verifica diretta, altrimenti si applica il teorema di estensione di Kolmogorov.*

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per l'indipendenza di eventi

Risultato generale.

Una collezione  $\{A_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  insieme arbitrario di indici, di eventi si dice collettivamente indipendenti se per ogni sottinsieme finito  $J \subseteq I$

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

## Teorema

*Comunque assegnati  $I$  e  $\{p_i\}_{i \in I}$  esiste sempre uno spazio di probabilità  $(S, \mathcal{A}, P)$  ed eventi  $\{A_i\}_{i \in I}$  che sono indipendenti e  $P(A_i) = p_i$ .*

Si prende lo spazio prodotto  $S = \prod_{i \in I} \{0, 1\}$ . Se  $I$  è finito è una verifica diretta, altrimenti si applica il teorema di estensione di Kolmogorov.

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per le probabilità di eventi

Per l'assegnazione probabilità di eventi, unioni e intersezioni De Finetti definisce la "coerenza" e trova condizione necessaria e sufficiente di esistenza con un metodo simile alla dualità nella programmazione lineare (da implementare).

De Finetti → Probabilità soggettive



Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirasegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirasegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per le probabilità di eventi

Per l'assegnazione probabilità di eventi, unioni e intersezioni De Finetti definisce la "coerenza" e trova condizione necessaria e sufficiente di esistenza con un metodo simile alla dualità nella programmazione lineare (da implementare).

De Finetti → Probabilità soggettive



Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per le probabilità condizionate

Problema discusso da Boole (1854)

Esistenza dimostrata per casi specifici: estrazioni successive senza reinserimento da un'urna, o le catene di Markov

Varie condizioni di esistenza estendendo le probabilità condizionate assegnate, Hailperin (1965)

Condizione necessaria e sufficiente di esistenza con un metodo simile alla dualità nella programmazione lineare: Walley, Pelessoni, Vicig (2004) considerando probabilità imprecise (da implementare).

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per le probabilità condizionate

Problema discusso da Boole (1854)

Esistenza dimostrata per casi specifici: estrazioni successive senza reinserimento da un'urna, o le catene di Markov

Varie condizioni di esistenza estendendo le probabilità condizionate assegnate, Hailperin (1965)

Condizione necessaria e sufficiente di esistenza con un metodo simile alla dualità nella programmazione lineare: Walley, Pelessoni, Vicig (2004) considerando probabilità imprecise (da implementare).

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Soluzione per le probabilità condizionate

Problema discusso da Boole (1854)

Esistenza dimostrata per casi specifici: estrazioni successive senza reinserimento da un'urna, o le catene di Markov

Varie condizioni di esistenza estendendo le probabilità condizionate assegnate, Hailperin (1965)

Condizione necessaria e sufficiente di esistenza con un metodo simile alla dualità nella programmazione lineare: Walley, Pelessoni, Vicig (2004) considerando probabilità imprecise (da implementare).

## Situazione generale

Quando si richiedono insieme le relazioni utilizzate nelle varie applicazioni

indipendenze, valori fissati per la probabilità di eventi  
probabilità condizionate, indipendenze condizionali

non esiste un risultato generale che dia condizioni per  
l'esistenza.

## Indipendenza condizionale

Per esempio, uno dei fondamenti del "Probabilistic reasoning in intelligent systems" di J. Pearl sono le indipendenze condizionali:

$A, B$  sono condizionalmente indipendenti dato  $C$  se  
 $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

Pearl aveva ipotizzato un'assiomatica (ossia un sistema di condizioni necessarie e sufficienti)  
ma ci sono controesempi di Studeny (1989):  
non esiste un'assiomatica finita.

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

**Commenti**

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Situazione generale

Quando si richiedono insieme le relazioni utilizzate nelle varie applicazioni

indipendenze, valori fissati per la probabilità di eventi  
probabilità condizionate, indipendenze condizionali

non esiste un risultato generale che dia condizioni per  
l'esistenza.

## Indipendenza condizionale

Per esempio, uno dei fondamenti del "Probabilistic reasoning in intelligent systems" di J. Pearl  
sono le indipendenze condizionali:

$A, B$  sono condizionalmente indipendenti dato  $C$  se  
 $P(A \cap B | C) = P(A | C)P(B | C)$ .

Pearl aveva ipotizzato un'assiomatica (ossia un sistema di  
condizioni necessarie e sufficienti)  
ma ci sono controesempi di Studeny (1989):  
non esiste un'assiomatica finita.

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi  
con Reins.
- Es. Tirasegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi  
senza Reins.
- Es. Tirasegno  
all'aperto

Commenti

Commenti

- Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio
- Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

QUESITO: Giulia e Paolo hanno tre figli, uno dei quali maschio. Qual la probabilità che uno ed uno solo degli altri due figli sia maschio?

SOLUZIONI:

1. se io so che il piu' grande dei tre e' maschio, questa informaz. e' irrilevante e la risposta e'  $1/2 = \frac{2}{4}$
2. se so che c'e' tra i tre figli un maschio:

$$\begin{aligned} & P(\text{esatt. due maschi} \mid \text{c'è un figlio maschio}) \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi e c'è un figlio maschio})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{3/8}{7/8} = 3/7. \end{aligned}$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi con Reins.

Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi senza Reins.

Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

QUESITO: Giulia e Paolo hanno tre figli, uno dei quali maschio. Qual la probabilità che uno ed uno solo degli altri due figli sia maschio?

SOLUZIONI:

1. se io so che il piu' grande dei tre e' maschio, questa informaz. e' irrilevante e la risposta e'  $1/2 = \frac{2}{4}$

2. se so che c'e' tra i tre figli un maschio:

$$\begin{aligned} & P(\text{esatt. due maschi} \mid \text{c'è un figlio maschio}) \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi e c'è un figlio maschio})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{3/8}{7/8} = 3/7. \end{aligned}$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi con Reins.

Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi senza Reins.

Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

QUESITO: Giulia e Paolo hanno tre figli, uno dei quali maschio. Qual la probabilità che uno ed uno solo degli altri due figli sia maschio?

SOLUZIONI:

1. se io so che il piu' grande dei tre e' maschio, questa informaz. e' irrilevante e la risposta e'  $1/2 = \frac{2}{4}$
2. se so che c'e' tra i tre figli un maschio:

$$\begin{aligned} & P(\text{esatt. due maschi} \mid \text{c'è un figlio maschio}) \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi e c'è un figlio maschio})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{P(\text{esatt. due maschi})}{P(\text{c'è un figlio maschio})} \\ &= \frac{3/8}{7/8} = 3/7. \end{aligned}$$

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori

Es. Due Assi con Reins.

Es. Tirassegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori

Es. Due Assi senza Reins.

Es. Tirassegno all'aperto

Commenti

Commenti

Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio

Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

## Concorso borse INdAM 2010: caratt. genetica

Esercizio 6. In una città di 5 milioni di abitanti, ogni abitante possiede una rara caratteristica genetica con probabilità  $2 \cdot 10^{-7}$  indipendentemente da tutti gli altri. È stato accertato che l'autore di un crimine possiede tale caratteristica. Dopo aver calcolato il valore atteso del numero di abitanti che posseggono tale caratteristica, rispondere alle seguenti domande:

i.(4 punti) sapendo che l'investigatore ha individuato una persona che possiede tale caratteristica, trovare la probabilità che ve ne sia almeno un'altra,

$$\text{Valore atteso } 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 1$$

ma il resto è ambiguo.

Qui l'esistenza non è un problema, ma va scelto il modello.

Definizione di probabilità

Indipendenza

Esempi

- Es. Assi e Cuori
- Es. Due Assi con Reins.
- Es. Tirasegno al coperto

Probabilità condizionate

Esempi

- Es. Pari e Cuori
- Es. Due Assi senza Reins.
- Es. Tirasegno all'aperto

Commenti

- Commenti
- Es. Ammissione TFA: altro figlio maschio
- Es. INdAM: caratt. genetica

Conclusioni

Definizione di  
probabilità

Indipendenza

Esempi

Es. Assi e Cuori  
Es. Due Assi  
con Reins.  
Es. Tirassegno  
al coperto

Probabilità  
condizionate

Esempi

Es. Pari e Cuori  
Es. Due Assi  
senza Reins.  
Es. Tirassegno  
all'aperto

Commenti

Commenti  
Es. Ammissione  
TFA: altro figlio  
maschio  
Es. INdAM:  
caratt. genetica

Conclusioni

## Conclusioni

- Trattazione di indipendenza e probabilità condizionate è delicata
- il docente dovrebbe avere controllo dei vari problemi
- due scelte:
  - evitare la discussione rispondendo solo ad eventuali domande
  - discutere alcuni aspetti riflettendo sulla modellizzazione