CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in ingegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 7

Negli esercizi seguenti si suppone di aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortonormali positivi $\{O; x, y\}$ di origine O.

1. Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e avente la direzione di $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Determinare la direzione della retta r di equazione $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$. Determinare inoltre l'angolo acuto formato da r e l'asse delle ordinate.

3. Determinare la direzione perpendicolare alla retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Determinare la retta passante per $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con l'asse x.

5. Data la retta r di equazione $x - 3y - 3 = 0$ siano A e B le intersezioni di r con l'asse delle ascisse e delle ordinate rispettivamente, dato $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ determinare l'area del triangolo di vertici A, B, C.

6. Sia r la retta di equazione $3x - 2y - 1 = 0$, nel fascio di rette per $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ determinare la retta s parallela a r e la retta s' perpendicolare a s. Determinare inoltre $d(P, r)$.

7. Classificare le seguenti coniche:
$2x^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0$, $y^2 - x^2 - 12x + 6y = 0$, $4y^2 + 4xy + x^2 = 0$.

8. Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:
$x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$, $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Negli esercizi seguenti si suppone di aver riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortonormali positivi $\{O; x, y, z\}$ di origine O.

9. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e avente la direzione del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10. Scrivere le equazioni della retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Scrivere l'equazione cartesiana del piano perpendicolare alla retta $x = 3y = 4z$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti rette sono parallele e quelle per i quali sono perpendicolari:
$\begin{cases} x + y = kz \\ 3x - y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - 2z = 3 \\ 3y - 4z = 1 \end{cases}$.

14. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta:
$\begin{cases} x + y = z \\ x - y = 0 \end{cases}$ appartiene al piano $3x + 3y = k$.

15. Descrivere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione delle rette r e s di equazioni:
$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z + k = 0 \end{cases}$ e determinarne la distanza.

16. Date le rette $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z - k = 0 \end{cases}$, determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r e s sono complanari e determinare, per tali valori, l'equazione del piano che le contiene.

17. Determinare il piano contenente la retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = 3 \end{cases}$ e perpendicolare alla retta $s : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 5y + 3 \end{cases}$.

18. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dall'insieme $S = \{ X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|X\| = 1 \}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in ingegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 6

1. Determinare autovalori e autovettori di $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e discuterne la diagonalizzabilità.

2. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ unabasedi$\mathcal{V}$ e sia $f \in End(\mathcal{V})$ definito da: $f(i) = 3j + k$, $f(j) = i - k$, $f(k) = 3j + i$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

3. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = 2I + X_0\,({}^tX_0)$; calcolare gli autovalori e gli autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità.

4. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(X) = ({}^tX)\,Y - ({}^tY)\,X$ essendo $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

5. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in End(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = <(2i + k), v> (j + 2k) + <(2i + k), (j + 2k)> v$; scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathfrak{B}$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(X) = ({}^tX)\,AX$ sull'insieme $S = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|X\| = 1\}$.

7. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $A^2 = O$, calcolare autovalori e autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità. Discutere inoltre il rango di A

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$,e sia $f \in End(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = AX - XA$; determinare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

9. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $Spec(A) = \{-1, -2, -3\}$; calcolare $\det A^{-1}$ e $traccia(A^{-1})$.

10. Sia $X_0 \in \mathbb{R}^3$ e sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(X) = X_0({}^tX)X_0$, calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$; determinare $B \in \mathbb{R}(2)$ simmetrica e definita positiva tale che $B^2 = A$.

12. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$ e sia $f \in End(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = AXA$. Calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

13. Sia $X_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = X_k\,({}^tX_k) \in \mathbb{R}(3)$; calcolare autovalori e autovettori di A_k, discuterne la diagonalizzabilità e calcolarne il rango al variare di $k \in \mathbb{R}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in ingegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 5

1. Determinare autovalori e autovettori di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y-z \\ x+2y+z \\ 2x-y-2z \end{pmatrix}$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

3. Sia $f_a \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f_a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ x-ay \\ y-8z \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$; calcolare gli autovalori di f_a e discuterne la diagonalizzabilità al variare di a.

4. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

5. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in End(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = (v \wedge j) < (2i+k) \wedge (2k-3j), i+j+k >$; scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathfrak{B}$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

6. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$; determinare autovalori e autovettori di A_k e discuterne la diagonalizzabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

7. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $A +^t A = O$, dimostrare che $(2I - A) \in GL(3, \mathbb{R})$.

8. Sia $A = \begin{pmatrix} k^2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$, $k \in \mathbb{R}$; determinare i valori di k per i quali A è definita positiva.

9. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $Spec(A) = \{1, 2, 3\}$; calcolare $\det A$ e $traccia(A)$.

10. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(e_1) = f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$; determinare $B \in \mathbb{R}(2)$ tale che $B^2 = A$.

12. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$ e sia $f \in End(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = XA$. Calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

13. Sia $H_\lambda = \{f \in End(\mathbb{R}^3)\,|\lambda \in Spec(f)\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $End(\mathbb{R}^3)$.

14. Sia $H_\lambda = \left\{ f \in End(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } f \right\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $End(\mathbb{R}^3)$.

15. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

16. Sia $H = \left\{ f \in End(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } f \right\}$; provare che H è un s.s.v. di $End(\mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

17. Sia $H = \left\{ f \in End(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono autovettori per } f \right\}$; provare che H è un s.s.v. di $End(\mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

18. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = X_0\,({}^tX_0) \in \mathbb{R}(3)$; calcolare autovalori e autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in ingegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 4

1. Calcolare $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ y - 2z = 0 \\ 6x - 2y + z = 1 \end{cases}.$$

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità della seguente equazione matriciale nell'incognita $X \in M_{3,2}(\mathbb{R})$:

$$BX = \left({}^tA\right)$$

e determinare le eventuali soluzioni.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare A^{-1}.

5. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in End(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = (v \wedge (2i + j))$; determinare $\det f$ e $traccia(f)$.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & \lambda \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità dell'equazione $AX = B$ nell'incognita $X \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x + y = k + 1 \\ 2x + 3y + z = k \\ x - z = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}.$$

8. Siano A, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$; calcolare $\det({}^tAB)$.

9. Siano $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; calcolare rango$XY$, rango$X^tY$ e rango${}^tXY$.

10. Siano $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; calcolare rango$X^tY$.

11. Siano $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 70 & 80 \\ 7 & 8 \\ 35 & 40 \end{pmatrix}$; calcolare $\det AB$ e $\det BA$.

12. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + t = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x - t = 2 \end{cases}.$$

13. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y - \lambda z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = \lambda \end{cases}.$$

14. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2y - z + t = 0 \\ 2z + 3t = 1 \\ y + z + 2t = 1 \end{cases}.$$

15. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare il rango di AB.

16. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$; calcolare $\det A({}^tB)$, $\det({}^tA)B$, $\det({}^tB)A$.

17. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k \\ x + y - 2z = 0 \\ x + z = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases} .$$

18. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & \lambda \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità dell'equazione $BX = A$ nell'incognita $X \in M_{4,2}(\mathbb{R})$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in ingegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 3

1. Sia $f_a \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ ay-z \\ 8z \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$; scrivere la matrice di f_a rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f_a$ e $\operatorname{Im} f_a$ calcolandone la dimensione e una base al variare di a.

2. Sia $H = \{f \in End(\mathbb{R}^3) \,|\, f(A) \subseteq B\}$ essendo:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;|\; x-y=0 \right\} \quad e \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta = \gamma \end{cases} \right\};$$

calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$; calcolare inoltre la dimensione di H.

3. Sia $K = \left\{ f \in H \;\middle|\; f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, K è un sottospazio vettoriale di H? In caso affermativo determinarne la dimensione.

4. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in End(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = < v, j > ((2i+k) \wedge (k-j))$; scrivere la matrice di f rispetto alla base $\mathfrak{B}$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base.

5. Sia $H = \{f \in End(\mathbb{R}^3) \,|\, f(A) \subseteq A\}$ essendo $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y=0 \right\}$; calcolare la dimensione e una base di A; provare che H è un sottospazio vettoriale di $End(\mathbb{R}^3)$, e calcolarne la dimensione.

6. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in igegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 2

1. Sia $H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ | \ x + 2y = 3\lambda \right\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $\mathbb{R}^2$.

2. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ | \ x - 3y = 0 \right\}$,

$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ | \ (2x + y)(2x - 3y) = 0 \right\}$,

$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ | \ 2^{x+2y} = \log_2 2 \right\}$.

3. Provare che l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine 3 forma un s.s.v. di $\mathbb{R}(3)$ e calcolarne la dimensione.

4. Sia $u_o \in \mathcal{V} \setminus \{O\}$ e sia $H = \{v \in \mathcal{V} \ | \ 2u_o \wedge v = O\}$; provare che H è un s.s.v. di $\mathcal{V}$ e calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H$.

5. Sia $H_\lambda = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$; calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Sia $H = \{X \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \ | \ AX = O\}$ con $A \in \mathbb{R}(2) \setminus \{O\}$; provare che H è un s.s.v. di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

7. Provare che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}(2)$.

8. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e sia $H = \{v \in \mathcal{V} \ | \ < v, 2i - 3j >= 0\}$, provare che H è un s.s.v. di $\mathcal{V}$ e calcolarne la dimensione e una base.

9. Sia $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - \lambda z \\ 2y - 2z \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$; per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ f_λ è lineare?

10 Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2 \\ x - 2y \end{pmatrix}$, $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ y \end{pmatrix}$,

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+3y \end{pmatrix}.$$

11. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definita da $f(X) =< X, X_o > X_o$ essendo $X_o = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

12. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-4z \\ x+2y \\ x-y-z \end{pmatrix}$; scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ e discutere l'invertibilità di f.

13. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, e sia $\mathcal{L}_A \in End(\mathbb{R}^4)$ definito da $\mathcal{L}_A(X) = AX$; descrivere $\ker \mathcal{L}_A$ e $\operatorname{Im} \mathcal{L}_A$.

14. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ provare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$.

Esercizi tratti da prime prove scritte intermedie

1. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di $\mathcal{V}$; siano $u = i + 2j$, $v = 3j - k$, $w = i - 3k$. Calcolare: $u \wedge w$, $< u, v >$, $< u, v \wedge w >$; provare inoltre che u, v e w sono linearmente indipendenti ed esprimere $i + j + k$ come combinazione lineare di u, v e w. (punti $2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$)

2. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(traccia \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & y & 1 \\ 3 & 0 & z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$)

3. Dire, motivando la risposta, quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ | \ \pi x + 5y = 0 \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \mid (x-1)(x+2y) = 0 \right\};$$

in caso di risposta affermativa determinarne la dimensione e una base. (punti $6+4=10$)

4. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ x+z \\ x-2y \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $2+2+2+2+2=10$)

5. Siano $X(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$; determinare i valori di λ per i quali $\{X(\lambda), Y, Y+Z(\lambda)\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. (punti 4)

6.Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2z \\ 3x+y-z \\ x+y+z \end{pmatrix}$; calcolare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $1+1+1+2+2=7$)

7. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di $\mathcal{V}$, dire, motivando la risposta, quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$:

$$A = \{v \in \mathcal{V} \mid v \wedge (i+j) = 0\},\ B = \{v \in \mathcal{V} \mid \ < i \wedge v, k >= 0\};$$

in caso di risposta affermativa determinarne la dimensione e una base. (punti $4+4=8$)

8. Siano $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; provare che X, Y, Z formano una base di $\mathbb{R}^3$ e ortonormalizzarli. (punti $3+4=7$)

1^a prova scritta intermedia di anni precedenti

Istruzioni: La Parte I consta di 5 esercizi a risposta multipla: segnare una crocetta sul simbolo a destra della risposta che si ritiene giusta tenendo presente che ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni domanda non risposta vale 0 punti. La Parte II consta di 3 esercizi ognuno dei quali, se svolto correttamente, vale 7 punti. E' consentito l'uso di libri e appunti, è vietato comunicare con altri studenti pena l'esclusione dal compito. Il tempo a disposizione è 90 minuti.

PARTE I

1. Sia $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathcal{V}$; $v_1 + \lambda v_2,\ 3v_1 + v_3, v_1 + v_2 + v_3$ generano $\mathcal{V}$:

   mai $\boxed{1}$ sempre $\boxed{x}$ dipende da λ $\boxed{2}$

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$; $traccia({}^tA\overline{B}) =$

   $4i$ $\boxed{1}$ 0 $\boxed{x}$ altro $\boxed{2}$

3. Sia $\mathfrak{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$; $< 8e_1 + 3e_2 - e_3, e_1 + e_2 >< e_3 - e_1, e_2 + e_1 >=$

   -11 $\boxed{1}$ 0 $\boxed{x}$ -2 $\boxed{2}$

4. Il numero delle soluzioni dell'equazione $z^4 + 1 = 0$, nell'incognita $z \in \mathbb{C}$ è:

   0 $\boxed{1}$ 2 $\boxed{x}$ 4 $\boxed{2}$

5. Sia $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda xy = 0 \right\}$; H è un s.s.v. di $\mathbb{R}^2$

   sempre $\boxed{1}$ mai $\boxed{x}$ dipende da λ $\boxed{2}$

PARTE II

1. Siano $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali X e Y possono essere completati ad una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare una tale base; scrivere inoltre le coordinate di $e_1 + e_3$ rispetto a tale base.

2. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, sia
$H_\lambda = \{v \in \mathcal{V} \mid < v, i - j + k >= \log_4 \lambda\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, per tali valori determinare la dimensione e una base di H_λ.

3. Sia $A(k) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{k}^2 + 1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$; determinare i valori di $k \in \mathbb{C}$ per i quali $A(k)$ è una matrice antihermitiana, scrivere la forma polare di tali k e rappresentarli graficamente.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
per il corso di laurea in igegneria civile a.a. 2011/2012
Prof.ssa A. NANNICINI - scheda esercizi # 1

1. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
calcolare $X + 2Y$, $Y - Z$, $X - 2Y + 3Z$, $(\log_2 64)X - 3Y + 3Z$.

2. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
calcolare $X - Y + Z$, $Y - Z - 3X$ e dedurre dal risultato che X, Y, Z sono linearmente dipendenti.

3. Provare che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Provare che $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, formano una base di $\mathbb{R}^2$ e scrivere le coordinate di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a questa base.

5. Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
calcolare $< X + 2Y, Z - W >$, $< 3X, Y - Z + W >$, $\|X + 2Z + W\|$.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare $A + 2B$, $2A - 4B$, $A(^tB) - B(^tA)$, AB, BA, $[A, B]$.

7. Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare trA.

9. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; calcolare $(BA)^{-1}$, è possibile calcolare $(AB)^{-1}$?

10. Sia $A \in \mathbb{R}(n)$, $A \neq 0$, tale che $trA = 0$ e sia $B \in \mathbb{R}(n)$ tale che $trB \neq 0$; provare che A e B sono linearmente indipendenti.

11. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Z(a) = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;
discutere la dipendenza lineare di X, Y, $Z(a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

12. Siano $z = 3 - 2i$, $w = -8 + i \in \mathbb{C}$; calcolare: $z + w$, $2z - 3w$, $z : w$.

13. Siano $z = -1 + 3i$, $w = 1 + i \in \mathbb{C}$; calcolare: $\Re e(z)$, $\Im m(w)$, $z\overline{w}$, $Arg(w^2)$, $|z + w|$, $\overline{w}^4$.

14. Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 3z + 8 = 0,\ z^6 = 64,\ z^8 = 8,\ z^6 = 1 - i,\ (z^3 - 1)(2z^2 + 3z + 1) = 0.$$

15. Calcolare i^{82} e $(-i)^{1042}$.

16. Siano $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$; calcolare: $Z - \overline{W}$, $(2Z, W)$, $\|Z + W\|$.

17. Siano $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -5 & 1+i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$; calcolare $A + 2B$, $A({}^t\overline{B}) - B({}^t\overline{A})$.

18. Determinare i valori di $k \in \mathbb{C}$ tali che $A(k) = \begin{pmatrix} ki & 2i \\ k & 2 \end{pmatrix}$ è hermitiana.

19. Sia $\{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ e siano $u = 2j + k$, $v = -i + k$, $w = i + j$; provare che $\{u, v, w\}$ è una base di $\mathcal{V}$.

20. Sia $\{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata e siano $u = i - 2j + k$, $v = i - 3j - k$, calcolare $< u, v >$, $u \wedge v$, $< u + v, j >$.