CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
per il corso di laurea in architettura quinquennale a.a. 2008/2009
(Corso B - Prof.ssa A. NANNICINI) scheda esercizi # 1

1. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
calcolare $X + Y$, $Y - Z$, $X - 2Y + Z$, $(\log_2 64)X - 3Y + 3Z$.

2. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
calcolare $X - Y + Z$, $Y - Z - 3X$ e dedurre dal risultato che X, Y, Z sono linearmente dipendenti.

3. Provare che $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Provare che $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, formano una base di $\mathbb{R}^2$ e scrivere le coordinate di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a questa base.

5. Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
calcolare $< X + Y, Z - W >$, $< X, Y - Z + W >$, $\|X + Z + W\|$.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare $A + 2B$, $2A - 4B$, $A({}^tB) - B({}^tA)$, AB, BA.

7. Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare $detA$ e trA.

9. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; calcolare $(BA)^{-1}$, è possibile calcolare $(AB)^{-1}$?

10. Risolvere il seguente sistema lineare quadrato:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 2x - y = 0 \\ x - 3z = 1 \end{cases} .$$

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$; calcolare $\det(A^{-1})$.

12. Sia $A \in \mathbb{R}(n)$, tale che $\det A = 0$; provare che non esiste $B \in \mathbb{R}(n)$ tale che $BA = I$.

13. Sia $A \in \mathbb{R}(n)$, $A \neq 0$, tale che $\det A = 0$ e sia $B \in \mathbb{R}(n)$ tale che $\det B \neq 0$; provare che A e B sono linearmente indipendenti.

14. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Z(a) = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;
discutere la dipendenza lineare di X, Y, $Z(a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

15. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; risolvere l'equazione matriciale $AX = B$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}(2)$.

16. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità dell'equazione ${}^tXX = A$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}(3)$.

17. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcolare $< A, B >$.

18. Sia $\{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ e siano $u = 2j + k$, $v = -i + k$, $w = i + j$; provare che $\{u, v, w\}$ è una base di $\mathcal{V}$.

19. Sia $\{i, j, k\}$ una base di $\mathcal{V}$ ortonormale e positivamente orientata e siano $u = i - 2j + k$, $v = i - 3j - k$, calcolare $< u, v >$, $u \wedge v$, $< u + v, j >$.

CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
per il corso di laurea in architettura quinquennale a.a. 2008/2009
(Corso B - Prof.ssa A. NANNICINI) scheda esercizi # 2

1. Sia $H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = \lambda \right\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $\mathbb{R}^2$.

2. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0 \right\}$,

$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(3x+y) = 0 \right\}$,

$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x-2y} = \ln e \right\}$.

3. Provare che l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine 3 forma un s.s.v. di $\mathbb{R}(3)$.

4. Sia $u_o \in \mathcal{V} \setminus \{O\}$ e sia $H = \{v \in \mathcal{V} \mid u_o \wedge v = O\}$; provare che H è un s.s.v. di $\mathcal{V}$ e calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H$.

5. Sia $H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$; calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Sia $H = \{X \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid AX = O\}$ con $A \in \mathbb{R}(2) \setminus \{O\}$; provare che H è un s.s.v. di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

7. Provare che $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}(2)$.

8. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e sia
$H = \{v \in \mathcal{V} \mid < v, 2i + 3j >= 0\}$, provare che H è un s.s.v. di $\mathcal{V}$ e calcolarne la dimensione e una base.

9. Sia $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + \lambda z \\ y - 2z \\ x + 3y \end{pmatrix}$; per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ f_λ è lineare?

10 Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 1 \\ x + 2y \end{pmatrix}$, $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ 2y \end{pmatrix}$,

$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 5x+3y \end{pmatrix}$.

11. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definita da $f(X) =< X, X_o > X_o$ essendo $X_o = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; descrivere $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

12. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-4z \\ x+2y \\ x-y-z \end{pmatrix}$; scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ e discutere l'invertibilità di f.

13. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, e sia $\mathcal{L}_A \in End(\mathbb{R}^4)$ definito da $\mathcal{L}_A(X) = AX$; descrivere $\ker \mathcal{L}_A$ e $\operatorname{Im} \mathcal{L}_A$.

14. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ provare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$.

15. Calcolare rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Siano A, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$; calcolare $\det({}^tAB)$.

17. Siano $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; calcolare rango$XY$, rango$X{}^tY$ e rango${}^tXY$.

18. Siano $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; calcolare rango$X{}^tY$.

19. Siano $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 70 & 80 \\ 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare $\det AB$ e $\det BA$.

20. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare: $\begin{cases} 2x+y-3z+t=1 \\ x-y+z=0 \\ x-t=2 \end{cases}$.

21. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x + y - \lambda z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = \lambda \end{cases}$.

22. Determinare autovalori e autovettori di $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

23. Calcolare autovalori e autovettori e discutere la diagonalizzabilità di $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

24. Risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2y - z + t = 0 \\ 2z + 3t = 1 \\ y + z + 2t = 1 \end{cases}$.

prima prova scritta intermedia 15112002

1. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di $\mathcal{V}$; siano $u = i + 2j$, $v = 3j - k$, $w = i - 3k$. Calcolare: $u \wedge w$, $< u, v >$, $< u, v \wedge w >$; provare inoltre che u, v e w sono linearmente indipendenti ed esprimere $i + j + k$ come combinazione lineare di u, v e w. (punti $2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$)

2. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$)

3. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ 6x - y + z = 1 \end{cases}$. (punti 4)

4. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare il rango di AB. (punti 4)

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; calcolare autovalori e autovettori di A^2 e discuterne la diagonalizzabilità.
(punti $2 + 2 + 3 + 3 = 10$)

prima prova scritta intermedia 19112004

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A. (punti $2 + 6 = 8$)

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$; calcolare $\det A({}^tB)$, $\det({}^tA)B$, $\det({}^tB)A$. (punti $2 + 2 + 2 = 6$)

3. Dire, motivando la risposta, quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \pi x + 5y = 0 \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)(x+2y) = 0 \right\};$$

in caso di risposta affermativa determinarne la dimensione e una base. (punti $6 + 4 = 10$)

4. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ x + z \\ x - 2y \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$)

5. Siano $X(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$; determinare i valori di λ per i quali $\{X(\lambda), Y, Y + Z(\lambda)\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. (punti 4)

prima prova scritta intermedia 13112006

1.Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2z \\ 3x+y-z \\ x+y+z \end{pmatrix}$; calcolare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ calcolandone la dimensione e una base. (punti $1+1+1+2+2=7$)

2. Sia $\mathcal{V}$ lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di $\mathcal{V}$, dire, motivando la risposta, quale dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$:

$$A = \{v \in \mathcal{V} \mid v \wedge (i+j) = 0\},\ B = \{v \in \mathcal{V} \mid\ < i \wedge v, k >= 0\};$$

in caso di risposta affermativa determinarne la dimensione e una base. (punti $4+4=8$)

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; calcolare autovalori e autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità. (punti $2+3+2=7$)

4. Siano $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; provare che X, Y, Z formano una base di $\mathbb{R}^3$ e ortonormalizzarli. (punti $3+4=7$)

5. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni: $\begin{cases} 2x+y-z=k \\ x+y-2z=0 \\ x+z=2 \\ 3x+y=2 \end{cases}$.

(punti $3+4=7$)

CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
PER IL CORSO DI LAUREA IN ARCHITETTURA QUINQUENNALE
a.a. 2008/2009 - Prof.ssa Antonella Nannicini (corso B)
Scheda es. # 3

Negli esercizi seguenti si suppone di aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortonormali positivi $\{O; x, y\}$ di origine O.

1. Scrivere l'equazione cartesiana della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e avente la direzione di $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Determinare la direzione della retta r di equazione $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$. Determinare inoltre l'angolo acuto formato da r e l'asse delle ordinate.

3. Determinare la direzione perpendicolare alla retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Determinare la retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con l'asse x.

5. Data la retta r di equazione $x + 3y - 1 = 0$ siano A e B le intersezioni di r con l'asse delle ascisse e delle ordinate rispettivamente, dato $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ determinare l'area del triangolo di vertici A, B, C.

6. Sia r la retta di equazione $3x - 2y - 1 = 0$, nel fascio di rette per $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ determinare la retta s parallela a r e la retta s' perpendicolare a s. Determinare inoltre $d(P, r)$.

7. Classificare le seguenti coniche:
   $2x^2 + 6xy + 2x + 4y + 1 = 0$, $y^2 - x^2 - 12x + 6y = 0$, $4y^2 + 4xy + x^2 = 0$.

8. Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:
   $x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$, $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Negli esercizi seguenti si suppone di aver riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortonormali positivi $\{O; x, y, z\}$ di origine O.

9. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e avente la direzione del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10. Scrivere le equazioni della retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Scrivere l'equazione cartesiana del piano perpendicolare alla retta $x = 3y = 2z$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti rette sono parallele e quelle per i quali sono perpendicolari:
$\begin{cases} x + y = kz \\ 3x - y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - 2z = 3 \\ 3y - 4z = 1 \end{cases}$.

14. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta:
$\begin{cases} x + y = z \\ x - y = 0 \end{cases}$ appartiene al piano $3x + 3y = k$.

15. Descrivere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione delle rette r e s di equazioni:
$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z + k = 0 \end{cases}$.

16. Date le rette $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z - k = 0 \end{cases}$, determinare i

valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r e s sono complanari e determinare, per tali valori, l'equazione del piano che le contiene.

17. Determinare il piano contenente la retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = 3 \end{cases}$ e perpendicolare alla retta $s : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 5y + 3 \end{cases}$.

CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
per il corso di laurea in architettura quinquennale a.a. 2008/2009
(Corso B - Prof.ssa A. NANNICINI) scheda esercizi # 4

1. Discutere l'esistenza di massimo, minimo, sup e inf per i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, determinandoli in caso esistano:
$A = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, $B = \left\{ \frac{n+1}{2n} \ \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, $C = \{n^2 \ \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. Determinare i punti di accumulazione dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
$A =]1, 2] \cup [3, 5[$, $B = \mathbb{Z}$.

3. Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti e quali sono chiusi:
$A =]-1, +\infty[$, $B =]1, 2[\cup [-1, 3]$, $C =]-\infty, 5]$, $D =]-\infty, 0] \cup]-1, +\infty[$.

4. Determinare l'insieme di esistenza e il segno delle seguenti funzioni:
$f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - 6x - 5}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 6x + 5}}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{2x^2 + 4x - 7}\right)$.
$f(x) = \dfrac{2x-1}{|x-6| - |x-5|}$, $f(x) = \dfrac{3\,|2x-1|}{|x^2 - 6| + x - 5}$.

5. Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni:
$f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{\sqrt{2\cos x - 1}}$, $f(x) = |x-1| \sqrt{\dfrac{\tan x - 1}{|\cos x|}}$, $f(x) = \dfrac{2x^{(x-1)}}{x^2 + 6x - 5}$.

6. Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni e riconoscere eventuali simmetrie del grafico:
$f(x) = \dfrac{\log_3(x^2 - 1)}{\sqrt{3^{x^2}}}$, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$, $f(x) = \dfrac{2\sin x}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} |x^3|}}$.

7. Determinare l'insieme di esistenza e l'immagine delle seguenti funzioni, discuterne inoltre l'invertibilità ed eventualmente determinarne la funzione inversa:
$f(x) = 3^{(2x-1)}$, $f(x) = 3\ln(3x - 1)$, $f(x) = 2x^2 - 2x$.

8. Usando la definizione di continuità verificare che le seguenti funzioni sono continue nei punti a fianco indicati:
$f(x) = 2x^2 - 2x$ $(x_0 = 0)$, $f(x) = 2\sin 2x$ $(x_0 = \pi)$.

9. Usando la definizione di limite verificare l'esattezza o meno dei seguenti limiti:

$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$, $\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2}{\sqrt{x+3}}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+2}=-\infty$, $\lim_{x\to 1}(2x^2-1)=-1$.

seconda prova scritta intermedia 24012005

1. Data la famiglia di coniche di equazione $x^2+ay^2+4x+8y=1$ determinare i valori di $a\in\mathbb{R}$ per i quali l'equazione rappresenta un'iperbole e ridurla in forma canonica.
(punti $2+4=6$)

2. Calcolare: $\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\sqrt{-2x}+4x}{x^2-\sqrt{-3x}}+\left(\frac{\ln(1-2x)}{x}\right)\right]$. (punti 6)

3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f(x)=5\sqrt{\frac{x^3-3x}{4-x^2}}$; determinare l'insieme di esistenza di f. (punti 5)

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f_k(x)=\begin{cases} ke^x \text{ per } x\geq 0 \\ -1+\ln(1-x) \text{ per } x<0\end{cases}$; determinare i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali f_k è continua e derivabile, per tali valori di k determinare gli intervalli di monotonia di f e l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1. (punti $2+3+3+3=11$)

5. Sono date le rette r e s di equazioni cartesiane $r:\begin{cases} 3x+2y=2 \\ y-x+3z=1\end{cases}$, $s:\begin{cases} z+3x=0 \\ 2x+3y=3\end{cases}$; provare che esiste un piano π contenente r e s e determinarne l'equazione cartesiana. (punti $3+4=7$).

seconda prova scritta intermedia 16012003

1. Data la retta r di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2z=0\end{cases}$ scrivere le equazioni cartesiane della retta s parallela a r e passante per il punto $P=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calcolare inoltre l'equazione cartesiana del piano π contenente r e s. (punti $4+4=8$)

2. Data la famiglia di coniche di equazione $ax^2+y^2+2(a-1)xy+4ax-2y=1$ classificare le coniche al variare di $a \in \mathbb{R}$. (punti 8)

3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{1+x-3x^2}{x^2-1}}$; determinare l'insieme di esistenza di f. (punti 5)

4. Calcolare: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin 2x}{2^x-1}-\dfrac{x\ln(1+2x)}{\cos x-1}\right)$. (punti 6)

5. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f(x)=\dfrac{2x^5}{(x^2-3)^2}$; determinare l'insieme di esistenza e i punti di massimo e minimo relativo di f. (punti $1+6=7$)

6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f(x)=x-3(\sin 2x)^2$; verificare che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,\pi]$ e determinare i punti $c\in]0,\pi[$ tali che $f'(c)=\dfrac{f(\pi)-f(0)}{\pi}$. (punti $2+4=6$)

seconda prova scritta intermedia 16012007

1. Classificare e ridurre in forma canonica la seguente conica:
$x^2-4y^2-6x+2y+3=0$. (punti $2+4=6$)

2. Date le rette $r:\begin{cases}x+2y-z=0\\3y+z-1=0\end{cases}$, $s_k:\begin{cases}x+2y=1\\2z-k=0\end{cases}$, determinare i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali r e s_k sono complanari e determinare, per tali valori, l'equazione del piano che le contiene. (punti $3+4=7$)

3. Calcolare il seguente limite:
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x^2-4x+5}-2\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)$. (punti 6)

4**.** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da: $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{2+x}{x^2-3}}$; determinare l'insieme di esistenza di f. (pt. 5)

5**.** Studiare crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x)=e^{(x-3)^2(x-1)};$$

determinarne inoltre il massimo e il minimo assoluto nell'intervallo $[0,4]$. (punti $6+3=9$)

CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
per il corso di laurea in architettura quinquennale a.a. 2008/2009
(Corso B - Prof.ssa A. NANNICINI) scheda esercizi # 5

1. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-1} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x+e^{-2}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \; ; \; f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x} & \text{se } x < -1 \\ \log_3(|x+2|) & \text{se } x \geq -1 \end{cases} .$$

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx}{|x|} & \text{se } x < -1 \\ 2e^{|x|} & \text{se } -1 < x < 1 \\ k & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \; ; \; f_k(x) = \begin{cases} k\left(e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 3\log_3 x^2 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} .$$

3. Discutere il tipo delle eventuali discontinuità della seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2+1}, \; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ \log_3 \sqrt{x-1} & \text{se } x > -1 \end{cases} , \; f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases} .$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 3 - 4\sqrt{x^2-x}\right); \; \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x+5)}; \; \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x^2}(1-\cos x);$$

$$\lim_{x\to 0} 3\ln(1+\sin x)^{\cot x}; \; \lim_{x\to 1}\frac{5^x-5}{x-1}.$$

5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}; \; \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; \; \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-2}{5x^2+x-1}; \; \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{\sin 3x}; \; \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}; \; \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}; \; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{(\tan x)^2}.$$

6. Sia $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3-3x+1} & \text{se } x < 0 \\ e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;

provare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette soluzioni e discutere le seguenti affermazioni:

se $x_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $f(x_0) = 0$ allora $x_0 \geq 0$;
se $x_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $f(x_0) = 0$ allora $x_0 < 0$.

7. Confrontare i seguenti infinitesimi:

a) $(\sin x)^2$, $(\tan x)^2$; b) $1-(\cos x)^2$, x^2; c) x^3, $\ln(1+x)$.

8. Confrontare i seguenti infiniti:

a) x^2-2x, $\sqrt{x^3+1}$; b) $\frac{1}{x^2}$, $1+\frac{1}{|x|}$.

9. Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-3}{(x-1)(x-4)}}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}-\sqrt{|x-1|}$.

10. Usando la definizione calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$f(x)=2\sin x$; $f(x)=\cos 3x$;

$f(x)=\log_4 x$, $x>0$; $f(x)=5^x$.

11. Dire se la funzione $f(x)=|x^2-5x+6|$ è derivabile nei punti 2 e 3.

12. Sia $f(x)=\frac{|x+3|}{x^2+8}\sqrt{2x}$; determinare l'insieme di esistenza di f e descrivere l'insieme:

$A_1=\{x\in\mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile in } x\}$.

13. Determinare l'insieme di esistenza della seguente funzione e discuterne la derivabilità al variare di $k\in\mathbb{R}$:
$f_k(x)=3\ln\sqrt{x^4+4x^2k^2+4k^4}$.

14. Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni mediante il limite del rapporto incrementale:

$f(x)=2\sin(x^2)$; $f(x)=x^3+3x^2-3$.

15. Usando le regole di derivazione calcolare la derivata prima e seconda delle seguenti funzioni, dopo averne determinato gli insiemi di esistenza:

$f(x)=2e^{-x}(x^2+5x+23)$;

$f(x)=(2x^4+3x^2-1)^{-1}\ln(2x^2-3x+5\cos x)^{-2}$;

$f(x)=8(3^x)^{\ln(\tan x)}$.

16. Dire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la seguente funzione è derivabile in 0 :

$$f_k(x)=\begin{cases} |x|^k\sin\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0 \\ 0, & \text{se } x=0 \end{cases} .$$

17. Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \max\{1 - |x-1|, 1 - |2-x|\}.$$

18. Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x, & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{se } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} .$$

19. Dopo aver determinato l'insieme di esistenza, studiare la derivabilità delle seguenti funzioni e, dove esistono, calcolarne le derivate:

$$f(x) = \sin\sqrt{x-1};\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases} ;$$

$$f(x) = x^{\arctan x};\ f(x) = \arccos\left(\frac{x}{x^2+1}\right);$$

$$f(x) = \sin x + \left(\ln\left(1 + x^2 e^x\right)\right)^{\sin x};\ f(x) = \cos\left(\ln(x^2 + x^4)\right).$$

CORSO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
per il corso di laurea in architettura quinquennale a.a. 2008/2009
(Corso B - Prof.ssa A. NANNICINI) scheda esercizi # 6

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$;

a) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$;

b) dimostrare che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Sia $f_k(x) = (\cos x - k \sin x) \sin x$, con $k \in \mathbb{R}$, e sia $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$; discutere l'applicabilità del teorema di Rolle a f_k in I al variare di k. Descrivere inoltre l'insieme $S_k = \left\{ c \in \left]0, \frac{\pi}{8}\right[\ \mid f'_k(c) = 0 \right\}$.

3. Sia $f(x) = e^{(x-1)}$; applicare il teorema di Lagrange a f in $I = \left[-\sqrt{5}, -1\right]$, dopo aver verificato che valgono le condizioni per l'applicabilità.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = x - 3(\sin 2x)^2$; verificare che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $I = [0, \pi]$ e determinare i punti $c \in]0, \pi[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(\pi) - f(0)}{\pi}$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \dfrac{2x^5}{(x^2 - 3)^2}$; determinare l'insieme di esistenza, $(IE(f))$, e i punti di massimo e minimo relativo di f.

6. Determinare i massimi e i minimi relativi delle seguenti funzioni:

$f(x) = \dfrac{|x^2 + 2x|}{x - 3}$; $f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$.

7. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti, dopo aver determinato il loro insieme di esistenza:

$f(x) = 3 \cos x \sin x + \cos 2x$; $f(x) = 3^{\tan x} + \log_3 x^5$.

8. Studiare la crescenza e decrescenza, i massimi e i minimi relativi della seguente funzione:
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

9. Studiare la crescenza e decrescenza, i punti di massimo e di minimo relativo, della seguente funzione:

$f(x) = e^{x^2}\,(x+3)$.

10. Discutere l'esistenza del massimo e del minimo assoluto della seguente funzione:

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; in caso esistano determinarli.

11. Dopo averne provata l'esistenza, determinare il massimo e il minimo assoluto della seguente funzione:

$f(x) = (x-1)^4\,(x-2)^3$ nell'intervallo $[0,3]$.

12. Trovare se esistono il massimo e il minimo assoluto della seguente funzione:

$f(x) = \sqrt{|x-1|} + |x-2|$.

13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x + x\,|x| + e^x - 1}{\sin x + x}\right);\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{2x}+3x}{3e^{2x}+2\sin x} + \frac{x - \ln 5x}{x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right);$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+\sqrt{x}-2x}{3x^3-\sqrt{x}};\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(x-\sqrt{x});$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,[\arctan(x+1) - \arctan x]\,;\ \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

14. Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

$f(x) = x - x^3 + x^5$; $f(x) = x^3 + |x^2-4| + x^2$; $f(x) = x^3 + |x^2-4| + x^2$;

$f(x) = \frac{1}{x} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2$; $f(x) = \dfrac{2x - 3\,|x| + 1}{2-|x|}$; $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{|2x-3|} + \dfrac{|x-2|}{2x-3}$;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+|x+4|}{x-3} & x<0 \\[2ex] \dfrac{x-|3x-4|}{x+3} & x\geq 0 \end{cases};\ f(x) = \sqrt{x^2-6x+8} + (x-3)^2;$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+3}};\ f(x) = x - \ln|\ln x|\,;\ f(x) = \begin{cases} \ln|x-3| & x<0 \\[1ex] \dfrac{x-|2x-4|}{x+3} & x\geq 0 \end{cases};$$

$$f(x) = \left(\ln\sqrt{|x|}\right) + \sqrt{x^2-1};\ f(x) = e^{\left(\dfrac{x^2-3x}{4-x}\right)};$$

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{2x}}{2}$; $f(x) = 3^x - |x|$; $f(x) = \arccos\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2-3}}$;

$f(x) = \sin x + 2\sin\dfrac{x}{2}$; $f(x) = \ln|\cos x - \sin x|$; $f(x) = \sqrt{(\cos x)^2 - (\sin x)^2}$.

15. Studiare le seguenti funzioni l variare di $a \in \mathbb{R}$ e disegnarne il grafico:

$f_a(x) = x^4 + x^2 + 2a$; $f_a(x) = \dfrac{x + |x-a|}{|x| - 8}$; $f_a(x) = \dfrac{ax}{e^x - 3}$.

16. Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi di Mc Laurin:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{\tan x}$.

17. Calcolare i seguenti integrali:

$\int \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}dx$; $\int (\ln x + x^2)\, dx$; $\int \left(2^x - (\sin x)^2\right) dx$;

$\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{3x}\right) dx$; $\int \tan 2x dx$; $\int \dfrac{e^{-2x} + 2}{4x - e^{-2x}}dx$.