## SCHEDA ESERCIZI # 2

## Lo spazio $M_{n,m}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times m$ a elementi reali

**1.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare $A + 2B$, $2A - 4B$, $A({}^tB) - B({}^tA)$, $AB$, $BA$, $[A, B]$.

**2.** Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

**3.** Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; calcolare $trA$.

**4.** Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; calcolare $A({}^tB) - B({}^tA)$, $AB$, $BA$, $[A, B]$.

**5.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; calcolare $(BA)^{-1}$, è possibile calcolare $(AB)^{-1}$?

**6.** Sia $A \in \mathbb{R}(n)$, $A \neq 0$, tale che $trA = 0$ e sia $B \in \mathbb{R}(n)$ tale che $trB \neq 0$; provare che $A$ e $B$ sono linearmente indipendenti.

**7.** Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; calcolare $X\,({}^tY)$ e discuterne l'invertibilità.

**8.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare l'insieme delle combinazioni lineari di $A, B, C, D$ e discutere l'esistenza di $D \in \mathbb{R}(2)$, $D$ non combinazione lineare di $A, B, C, D$.

**9.** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; scrivere $A$ come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

**10.** Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare $A^2$ e $A^3$ e determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $I, A, A^2, ...., A^k$ sono linearmente indipendenti.

**11.** Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; discutere l'esistenza di $C \in \mathbb{R}(3)$ tale che $BC = A$ e quella di $D \in \mathbb{R}(3)$ tale che $AD = B$.

**12.** Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare $< A, B >$, $\|A\|$, $\|B\|$.

## SCHEDA ESERCIZI # 1

### Struttura lineare e struttura metrica su $\mathbb{R}^n$

**1.** Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$;
calcolare $X + 2Y$, $Y - Z$, $X + 2Y + 3Z$, $(\log_2 32)X - 3Y - 3Z$.

**2.** Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
calcolare $X - Y + Z$, $Y - Z - 3X$ e dedurre dal risultato che $X$, $Y$, $Z$ sono linearmente dipendenti.

**3.** Provare che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

**4.** Provare che $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, formano una base di $\mathbb{R}^2$ e scrivere le coordinate di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a questa base.

**5.** Provare che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare un elemento di $\mathbb{R}^3$ che non sia combinazione lineare di $X, Y, Z$.

**6.** Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $X_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

**7.** Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; calcolare $< X + Y, Z - W >$, $< 3X, Y - Z + 2W >$, $\|X + 2Z + W\|$.

8. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Determinare la proiezione ortogonale di $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10. Determinare l'angolo fra $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.