SCHEDA ESERCIZI # 1

Struttura lineare e struttura metrica su $\mathbb{R}^n$

1. Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -9 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;
calcolare $X - 2Y$, $Y + Z$, $X - Y + 2Z$, $(\log_3 81)X + 3Y - 3Z$.

2. Siano $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;
calcolare $3X - 3Y + 3Z$, $2X + Y - Z$ e dedurre dal risultato che X, Y, Z sono linearmente dipendenti.

3. Provare che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Provare che $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, formano una base di $\mathbb{R}^2$ e scrivere le coordinate di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a questa base.

5. Provare che $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare un elemento di $\mathbb{R}^3$ che non sia combinazione lineare di X, Y, Z.

6. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

7. Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

calcolare $< X+Y, Z-W >$, $< 3X, Y-Z+2W >$, $\|X+2Z+W\|$.

8. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

9. Determinare la proiezione ortogonale di $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ su $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. Determinare l'angolo fra $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.