Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

La Independencia de la Hipótesis del Continuo sobre un Modelo Fibrado para la Teoría de Conjuntos

Tesis presentada como requisito de grado por

John Benavides Navarro

Director: Xavier Caicedo Ferrer

5 de febrero de 2004

...El universo (que otros llaman la biblioteca) se compone de un numero indefinido, y tal vez infinito, de galerías hexagonales, con vastos pozos de ventilación en el medio, cercado por barandas bajísimas. Desde cualquier hexágono, se ven los pisos inferiores y superiores: interminablemente. La distribución de las galerías es invariable. Veinte anaqueles, a cinco largos anaqueles por lado, cubren todos los lados menos dos; su altura, que es la de dos pisos, excede apenas la de un bibliotecario normal. Una de las caras libres da a un angosto zaguán, que desemboca en otra galería, idéntica a la primera y a todas. A izquierda y a derecha del zaguán hay dos gabinetes minúsculos. Uno permite dormir de pie, otro, satisfacer las necesidades fecales. Por ahí pasa la escalera espiral que se abisma y se eleva hacía lo remoto. En el zaguán hay un espejo, que fielmente duplica las apariencias. Los hombres suelen inferir de ese espejo que la Biblioteca no es infinita (si lo fuera realmente ¿a que esa duplicación ilusoria?); yo prefiero soñar que las superficies bruñidas figuran y prometen el infinito...

Como todos los hombres de la Biblioteca, he viajado en mi juventud; he peregrinado en busca de un libro, acaso del catálogo de catálogos; ahora que mis ojos casi no pueden descifrar lo que escribo, me preparo a morir a pocas leguas del hexágono en que nací. Muerto, no faltarán manos piadosas que me tiren por la baranda; mi sepultura será el aire insondable: mi cuerpo se hundirá largamente y se corromperá y disolverá en el viento engendrado por la caída, que es infinita. Yo afirmo que la Biblioteca es interminable. Los idealistas arguyen que las salas hexagonales son una forma necesaria del espacio absoluto o, por lo menos, de nuestra intuición del espacio. Razonan que es inconcebible una sala triangular o pentagonal. (Los místicos pretenden que el éxtasis les revela una cámara circular con un gran libro circular de lomo continuo, que da toda la vuelta de las paredes; pero su testimonio es sospechoso; sus palabras, oscuras. Ese libro cíclico es Dios.) Básteme, por ahora, repetir el dictamen clásico: La Biblioteca es una esfera cuyo centro cabal es cualquier hexágono, cuya circunferencia es inaccesible.

La Biblioteca de Babel
Jorge Luis Borges

Prefacio

Este trabajo es una elegante aproximación a la independencia de la hipótesis del continuo de Cantor que busca aportar una vision diferente de ésta que no requiere mayores conocimientos y habilidades combinatorias y que está dirigido para todo tipo de personas con una formación matemática básica en teoría de conjuntos, topología y teoría de modelos.

El autor esta agradecido con un gran numero de personas que de alguna u otra manera fueron participes en el desarrollo de este trabajo. En primera instancia quisiera agradecer a mis padres quienes me han brindado todas las oportunidades que he tenido. A Carolyn Caceres cuya fe y admiración hacia mi fueron siempre un gran soporte y estimulo para seguir adelante. A Andrés Forero, Julian Castillo y Sergio Tello con quienes conformamos un gran grupo de estudio y cuyas geniales y singulares inteligencias fueron fundamentales en mi formación como matemático. Finalmente quisiera agradecer a dos personas cuyo papel fue de suma importancia en esta hermosa aventura que fue estudiar matemáticas, en primer termino al profesor Luis Jaime Corredor al cual debo gran parte de mi conocimiento y mi pasión por la lógica y la teoría de modelos; por último al profesor Xavier Caicedo a quien se debe gran parte de este trabajo y a quien agradezco el haber sido una magnifica guía en este proceso.

Índice general

Introducción

El primero de los 23 problemas de Hilbert, la Hipótesis del Continuo de Cantor (CH), la cual afirma que todo conjunto de numeros reales es enumerable o bien tiene la cardinalidad del continuo $2^{\aleph_0}$, fue quizás el origen de una de las construcciones más notables de la matemática de la segunda mitad del siglo XX, a saber, la técnica del forcing (o forzamiento) ideada por Paul Cohen en 1963. Ésta permitió demostrar que CH es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel junto con el Axioma de Elección (ZFC). Posterior a esto, los principios de dicha construcción permitieron lograr una numerosa cantidad de resultados en diversas áreas de las matemáticas, además de los famosos resultados clásicos de independencia como el del Axioma de Elección o la Hipótesis de Suslin. Por ejemplo Robinson introdujo la noción de modelo genérico en la teoría de modelos y Bairwise y Keisler utilizaron éstos para obtener resultados de omisión de tipos en lógicas infinitarias.

En principio la aproximación de Cohen fue puramente sintáctica, se definía un procedimiento para hallar una contradicción en ZFC dada una en ZFC+$\neg$CH, lo que implicaría $Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + \neg CH)$. Esta aproximación poco constructivista en ningún momento proporcionaba un modelo de ZFC+-$\neg$CH. Sin embargo en las publicaciones de sus resultados Cohen desarrollo otro tipo de aproximaciones vía modelos transitivos enumerables (m.t.e) de ZFC. En una de estas aproximaciones, dadas $\psi_1, ..., \psi_n$ axiomas de ZFC y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ axiomas de ZFC+$\neg$CH, se mostraba en ZFC la existencia de una extensión genérica $M[G]$ donde se verificaban $\varphi_1, ..., \varphi_n$. La otra aproximación formalizaba la lógica dentro de ZFC, de tal manera que por ejemplo la expresión $M \models ZFC$ fuera simplemente un predicado con variable libre M, siendo entonces un teorema formal de ZFC que

$$\forall M(M \text{ un m.t.e. para } ZFC \rightarrow \exists N(M \subseteq N \wedge N \text{ es un m.t.e. para } ZFC + \neg CH))$$

Sin embargo todas estas construcciones no dejaban de aparecer como técnicas ad-hoc cuya efectividad resultaba misteriosa. Quizás por esto aparecieron numerosas reinterpretaciones de este forcing, que podemos llamar clásico, cada una basada sobre principios distintos pero bajo la misma esencia matemática. Entre éstas vale destacar por ejemplo la aproximación a través de Modelos de valores Booleanos (Scott-Solovay), la cual guiada por motivaciones intuitivas más claras, efectivamente construía un modelo para ZFC+$\neg$CH, aunque no era un modelo clásico (con dos valores de verdad) sino un modelo cuyos valores de verdad variaban en un algebra booleana completa.
Otra aproximación realizada por Lawvere y Tierney, observo que el forcing de Cohen puede ser interpretado en categorías de haces donde se pueden imitar las construcciones clásicas de la teoría de conjuntos (Un topos de Grothendieck). Sin embargo, aunque los categoristas reclaman la simplicidad de este método frente al de Cohen, la generalidad de este sumada al inmenso aparato categórico del cual se vale, hacen que sea quizás más abstracto en inaccesible que el método de Cohen. A pesar de todo esta aproximación deriva en otra visión no tan general, basada en haces y prehaces sobre espacios topológicos, que simplifica en gran medida las herramientas categóricas y de donde se deriva una construcción de suma elegancia de universos alternos que permiten el desarrollo de una nueva matemática que enriquece nuestra vision clásica de la misma. Esta además revelará interesantes conexiones entre lógica y geometría y permitirá unificar resultados fundamentales de teoría de modelos, como por ejemplo el teorema de completitud, de compacidad y de omisión de tipos, junto con los resultados del forcing clásico y sus variaciones (ver [Ca]). Otro hecho por demás interesante será que la lógica que gobierna estos objetos tendrá conexiones explícitas con la lógica intuicionista, situación que también se presentaba en el forcing clásico pero que no era del todo evidente. Igualmente será posible imitar la construcción clásica de la jerarquía cumulativa de conjuntos, produciendo una verdadera jerarquía de conjuntos variables que derivará en un modelo de

Kripke lo cual via una construcción de modelos genéricos, permitirá evidenciar relaciones directas entre la lógica clásica e intuicionista.
Nuestro objetivo en este trabajo, será presentar esta última aproximación via haces de estructuras, construyendo una jerarquía de conjuntos variables donde se verifiquen los axiomas de ZFC, para finalmente presentar el núcleo de este trabajo: una prueba nuestra en estos modelos de la independencia de la hipótesis del continuo, que via modelos genéricos probablemente permitirá dar nuevas luces sobre una aproximación a pruebas clásicas de independencia. Para tal efecto hemos dividido este trabajo en 4 capítulos más una sección de preliminares:

1. **Preliminares, Forcing e Intuicionismo.** Se hace una presentación informal del forcing clásico, basada en la aproximación que hace Kunen de este. Se dan esquemas sobre las pruebas de la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo. Sobre intuicionismo se presentan un numero de resultados que serán de utilidad en los desarrollos posteriores y se presentará la semántica de Kripke para referir las conexiones con el intuicionismo de las que hablamos anteriormente.

2. **Haces de Estructuras.** Se hace una presentación basada en el trabajo realizado en [Ca], sobre la construcción de estructuras de objetos variables y la lógica que las gobiernan. Posterior a esto se realizará la construcción de la jerarquía cumulativa de los conjuntos variables sobre un espacio topológico arbitrario.

3. **La Jerarquía Cumulativa sobre un Orden Parcial.** Se realiza la construcción de la jerarquía cumulativa de los conjuntos variables, en el caso particular donde el espacio topológico es un orden parcial bajo la topología de sus subconjuntos hereditarios. Veremos que esta construcción deriva de una manera natural en un modelo de Kripke además de algunas características de su comportamiento basados en el trabajo presentado en [Vi].

4. **ZFC en $\mathbb{V}$.** Veremos que en la estructura definida en el capitulo anterior bajo la semántica que rigen a estos objetos variables, se verifican los axiomas de ZFC. Nos basaremos para esto en el trabajo realizado en [Vi], y para el axioma de elección presentaremos el trabajo realizado en [Ri], en particular introduciremos otra aproximación al axioma de infinito que derivara en la construcción de ω en estos modelos. Además se presentaran como son en estos modelos, algunas de las construcciones básicas de teoría de conjuntos, como funciones, productos cartesianos, conjuntos potencia etc.

5. **La independencia de la Hipótesis de Continuo** Este será el el objetivo fundamental de este trabajo introducimos una prueba propia donde construiremos un modelo de la teoría de conjuntos sobre un orden parcial cuidadosamente escogido para el cual se fuerzan los axiomas de ZFC y donde la hipótesis del continuo falla. Para tal objetivo se discutirán unos resultados necesarios sobre funciones y se introduce lo que en teoría de categorías se llama el subobjeto clasificador para este tipo de estructuras.

Preliminares: Forcing e Intuicionismo

Presentaremos en esta primera parte nociones básicas y resultados sobre el forcing clásico e intuicionismo, que permitan seguir las ideas de los demás capítulos para un lector no familiarizado con estos temas. En su mayoría se presentaran resultados sin demostraciones, que servirán de referencia cuando sean utilizados o se comente algo sobre estos más adelante. Sin embargo recomendamos remitirse a [Ku], para una aproximación detallada al forcing de Cohen, y a [Van] para una introducción al intuicionismo.

0.1. Forcing

0.1.1. Modelos Genéricos

Definición 0.1. *Dado $\langle \mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ decimos que es un o.p.m (Orden Parcial Con Máximo) si $\leq$ ordena parcialmente a $\mathbb{P}$ y $1_{\mathbb{P}}$ es máximo en este orden.*

Definición 0.2. *i.Dado $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial y $D \subseteq \mathbb{P}$, decimos que D es denso en $\mathbb{P}$ si y sólo si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \leq p$ tal que $q \in D$.*
ii. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ si y sólo si:
a-) Para todo $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.
b-) Para todo $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$, $q \geq p$ implica $q \in G$.

Definición 0.3. *Dado $\mathbb{P}$ un o.p.m., y M un modelo transitivo de $ZF - P$ (Los axiomas de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de Potencia), decimos que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M si y sólo si G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ y para todo denso $D \subseteq \mathbb{P}$, $D \in M$ implica $G \cap D \neq \emptyset$*

El primer resultado necesario presenta la primera debilidad de esta aproximación del Forcing, la existencia de filtros genéricos depende de la existencia de un modelo enumerable de $ZF - P$ un resultado que no se puede demostrar. Como veremos la interpretación del forcing que haremos más adelante trabajara con otro tipo de genéricos más generales que no requerirán de estas condiciones de enumerabilidad.

Lema 0.1. *Si M es enumerable y $p \in \mathbb{P}$, entonces existe G, $\mathbb{P}$-genérico, sobre M tal que $p \in \mathbb{P}$.*

Lema 0.2. *Si M es un modelo transitivo de $ZF - P$, $\mathbb{P} \in M$ es un o.p.m para el cual*

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge (q, r \text{ no comparables}))$$

si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $G \notin M$

El lema anterior es importante, ya que el hecho de que el filtro genérico en general no este en el modelo base (ground model), permitirá la construcción de una extensión donde el genérico esté. Esta extensión, fuertemente dependiente del genérico, bajo una cuidadosa escogencia del orden guiará a numerosos e interesantes resultados.

Definición 0.4. *τ es un $\mathbb{P}$-nombre si y sólo si τ es una relación y para todo $(\sigma, p) \in \tau$, σ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}$. Sea $\mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ la clase de los $\mathbb{P}$-nombres y $\mathbb{M}^{\mathbb{P}} = \mathbb{V}^{\mathbb{P}} \cap M$ para M modelo transitivo de ZFC.*

Ahora introducimos la definición de la extension genérica para M un modelo transitivo de ZFC.En primera instancia se define

$$\tau_G = \{\sigma_G : \exists p \in G \text{ tal que } (\sigma, p) \in \tau\}$$

y

$$M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$$

la extensión genérica de M para $G \subseteq \mathbb{P}$ genérico. $M[G]$ es la minima extensión transitiva de M que contiene a G es decir que también se verifica $M \subseteq M[G]$.

Introducimos un $\mathbb{P}$-nombre asociado a cada elemento de M, la construcción de este será muy similar a una que realizaremos en un futuro cuya motivación dará claridad del porque de su definición. Dado $\mathbb{P}$ un o.p.m definimos

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$$

por ejemplo

$$\check{0} = 0$$

$$\check{1} = \{(\check{0}, 1_{\mathbb{P}})\}$$

$$\check{2} = \{(\check{0}, 1_{\mathbb{P}}), (\check{1}, 1_{\mathbb{P}})\}$$

Se puede verificar que $\check{x}_G = x$ de donde se desprende que $M \subseteq M[G]$.

Teorema 0.1. *Dado M un modelo transitivo enumerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un o.p.m y $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-genérico, entonces*

$$M[G] \models ZFC$$

De aquí en adelante M sera un modelo transitivo enumerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un o.p.m y $G \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-genérico.

0.1.2. Forcing

En pocas palabras el forcing de Cohen se puede explicar de la siguiente manera: Los nodos en el orden $\mathbb{P}$ en cierto sentido serán pequeñas caracterizaciones dentro del modelo M acerca de G o alguna construcción relacionada con G, las cuales en general no se podrán construir dentro de M. A pesar de que dichas construcciones no están en el modelo base, dentro de este se podrá inferir su existencia además de características sobre estas. Más precisamente se podrá construir un lenguaje de forzamiento donde dada una sentencia φ en este lenguaje, por medio de nombres en $M^{\mathbb{P}}$ se afirmará algo sobre $M[G]$. Una observación importante es que el valor de verdad de φ sera fuertemente dependiente de G y que el lenguaje se construirá de tal manera que dentro de M se puedan inferir los valores de verdad en $M[G]$ para una formula que se refiera a G o objetos relacionados. Definimos en primera instancia:

$$\Vdash_p \varphi \text{ (p fuerza } \varphi)$$

cuando para todo G, $\mathbb{P}$-genérico sobre M, si $p \in G$ entonces φ es verdad en $M[G]$.

Definición 0.5. *Dada $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una formula, M un modelo enumerable transitivo de ZFC. Para $p \in \mathbb{P}$ donde $\mathbb{P}$ es un o.p.m. y $\tau_1, ..., \tau_n \in\ M^{\mathbb{P}}$*

$$\Vdash_p \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow \forall G((G \quad \mathbb{P} - \textit{genérico} \wedge p \in G) \rightarrow \varphi^{M[G]}(\tau_{1_G}, ..., \tau_{n_G}))$$

Observe que la noción $\Vdash_p \varphi(x_1, ..., x_n)$ esta definida por fuera de M será necesario hallar un camino para que dentro de M podamos determinar $\Vdash_p \varphi(x_1, ..., x_n)$. Para tal fin definiremos otro tipo de forzamiento que este definido dentro de M y que será equivalente al ya definido.

Definición 0.6. *Dado $p \in \mathbb{P}$ y $\tau_1, ..., \tau_n \in V^{\mathbb{P}}$*
1.

$$\Vdash_p^* \tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow$$

i. Para toda $(\pi_1, s_1) \in \tau_1, \{q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge \Vdash_q^* \pi_1 = \pi_2)\}$ es denso bajo p

ii. Para todo $(\pi_2, s_2) \in \tau_2, \{q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1(q \leq s_1 \wedge \Vdash_q^* \pi_1 = \pi_2)\}$ *es denso bajo p*

2.

$$\Vdash_p^* \tau_1 \in \tau_2 \Leftrightarrow \{q : \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge \Vdash_q^* \pi = \tau_1)\} \text{ es denso bajo } p$$

3.

$$\Vdash_p \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow$$

$$\Vdash_p^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \text{ y } \Vdash_p^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

4.

$$\Vdash_p^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow \text{ no existe } q \leq p \text{ tal que } \Vdash_q^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

5.

$$\Vdash_p^* \exists x \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow \{r : \exists \sigma \in V^{\mathbb{P}}(\Vdash_r^* \varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n))\} \text{ es denso bajo } p$$

Teorema 0.2. *Sea M un modelo transitivo enumerable de ZFC y $\mathbb{P}$ un o.p.m. en M, dada $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una formula y $\tau_1, ..., \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$*
i.$\forall p \in \mathbb{P}$,

$$\Vdash_p \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \leftrightarrow (\Vdash_p^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^M$$

ii.$\forall G$, $\mathbb{P}$-genérico sobre M

$$\varphi(\tau_{1_G}, ..., \tau_{n_G})^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(\Vdash_p \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$$

0.1.3. Pruebas de Independencia

Veremos ahora una aproximación informal de como las extensiones genéricas permiten obtener resultados de independencia. En particular veremos las pruebas de independencia que aquí nos conciernen, es decir la independencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección.

Existe un primer resultado de independencia que simplemente se deriva de la construcción de extensiones genéricas. L denotará la clase de los conjuntos construibles, para la construcción de esta clase remitimos al lector a [Ku]. L sera un modelo de ZFC y mas aún en este modelo vale la hipótesis generalizada del continuo ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$), es decir que este modelo nos permitirá probar que la hipótesis del continuo es consistente, un resultado importante para que el trabajo que vamos a realizar tenga alguna motivación.

Teorema 0.3. $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC + GCH)$

El resultado anterior no es el que nos concierne, ya que este es independiente de la construcción de algún modelo genérico. El resultado que nos importa es la independencia del axioma de constructibilidad:

$$\text{Axioma de Constructibilidad: } V = L$$

El axioma nos dice que todo conjunto es construible, este axioma es consistente con ZF pues bien precisamente

$$L \models ZF + V = L$$

Veremos ahora

Teorema 0.4. $Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + V \neq L)$

Demostración. Tome M un modelo transitivo enumerable de ZFC, sea $\mathbb{P}$ un orden parcial tal que dado G $\mathbb{P}$-genérico, $G \notin M$, (por ejemplo tome $\mathbb{P} = fin(\omega \rightarrow 2)$ las funciones finitas de ω en 2 ordenadas por inclusion inversa). Considere $N = M[G]$ se puede mostrar que $N \cap On = M \cap On$, por lo cual $L^N = L^M \subseteq M$ por lo tanto N satisface $V \neq L$. $\square$

La Hipótesis del Continuo

Definición 0.7. *Sea $fin(I \to J)$ las funciones parciales finitas de I en J, donde finitas significa que sus dominios son finitos. Se define el orden de la siguiente manera*

$$p \leq q \Leftrightarrow q \subseteq p$$

donde k es un cardinal no enumerable.

El elemento máximo de este orden será $1_{\mathbb{P}} = \emptyset$, además éste gozara de ciertas propiedades combinatorias fundamentales que se discutirán mas adelante.

Teorema 0.5. $Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg CH)$

Demostración. Si G es un filtro en $\mathbb{P} = fin(I, J)$ entonces se puede mostrar que $\bigcup G$ es una función tal que $dom(\bigcup G) = I$ y $ran(\bigcup G) = J$. Si tomamos $I = k \times \omega$ y $J = 2$ donde $k > \aleph_1$, entonces $\mathbb{P} = fin(k \times \omega \to 2)$. Dado M un modelo enumerable de ZFC se puede mostrar que $\mathbb{P} \in M$ y que dado G $\mathbb{P}$-genérico sobre M,

$$\bigcup G : k \times \omega \to 2$$

es una función sobreyectiva. Podemos pensar a $\bigcup G$ como una enumeración de numerosas funciones de ω en 2. Es decir definimos

$$f_\alpha : \omega \to 2$$

$$f_\alpha(n) = \bigcup G(\alpha, n)$$

para $\alpha < k$. Si consideramos

$$D_{\alpha\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \text{ tal que } (\alpha, n) \in dom(p) \wedge (\beta, n) \in dom(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

este es denso en M, por lo tanto $G \cap D_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ lo que implica $f_\beta \neq f_\alpha$. Lo que nos da una sucesión $(f_\alpha : \alpha < k)$ de funciones distintas de ω en 2 por lo cual $2^{\aleph_0} \geq k$ es cierto en $M[G]$. $\square$

La validez de la prueba anterior depende fuertemente de una propiedad combinatoria del orden. Veamos porque ésta será necesaria: consideremos $\mathbb{P} = fin(\omega \to k)$ donde k es un cardinal no enumerable en M, si G es $\mathbb{P}$-genérico, entonces

$$\bigcup G : \omega \to k$$

es una función sobreyectiva de ω en k en $M[G]$, por lo tanto k es un cardinal enumerable en $M[G]$, esto significa que la noción de cardinal nos es absoluta (sobre absoluticidad remitirse a [Ku]). Será importante en el teorema anterior entonces que k no colapse a un cardinal enumerable en $M[G]$, esto se seguirá de una propiedad del orden que en cierto sentido determinará que este sea grande respecto a longitud y estrecho respecto a su ancho, más precisamente:

Definición 0.8. *Dado un orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ decimos que satisface la condición de cadena enumerable c.c.c (countable chain condition) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es enumerable. (Una anticadena es un subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que para todo par de elementos en este conjunto no existe otro elemento del cual sean extensión)*

Entonces para que la prueba del teorema anterior sea completa serán necesarios los siguientes resultados.

Lema 0.3. *Si I es arbitrario y J es enumerable $fin(I \to J)$ cumple c.c.c.*

Teorema 0.6. *Si $\mathbb{P} \in M$ y $\mathbb{P}$ cumple c.c.c. en M (note que en V la cumple trivialmente ya que M es enumerable) entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinalidades.*

El Axioma de Elección Veremos ahora la independencia del axioma de elección de los axiomas de ZF, sin embargo para la motivación original de esta prueba recomendamos remitirse a [Kri] donde se hace una presentación de $Con(ZF^- + \neg AC)$ totalmente clásica, sin ningún tipo construcción sofisticada.

Sera necesario en esta prueba construir en las extensiones genéricas la clase de subconjuntos hereditariamente definibles con ordinales y otros parámetros cuidadosamente escogidos. Vale la pena mencionar a lo que nos estamos refiriendo.

Definición 0.9. *Dado M un modelo de ZFC, $HOD(T)$ es la clase de subconjuntos hereditariamente definibles de M con parámetros en On y T.*

Teorema 0.7. *Si T es transitivo*

$$HOD(T) \models ZF$$

Corolario 0.1. $HOD(P(\omega)) \models ZF$

Lema 0.4. *Dado M un modelo de ZFC si I, J son no enumerables en M, si tomamos $\mathbb{P} = fin(I \to 2)$ y $\mathbb{Q} = fin(J \to 2)$ entonces*

$$\textit{Para } \mathbb{P},\ \Vdash_{1_{\mathbb{P}}} \varphi(\check{\alpha})^{HOD(P(\omega))} \Leftrightarrow \textit{ Para } \mathbb{Q},\ \Vdash_{1_{\mathbb{Q}}} \varphi(\check{\alpha})^{HOD(P(\omega))}$$

Teorema 0.8. $Con(ZF) \to Con(ZF + \neg AC)$

Demostración. Dado M un modelo enumerable de ZF tome I tal que no sea enumerable en M. Sea $\mathbb{P} = fin(I \to 2)$ y $N = HOD(P(\omega))^{M[G]}$ para G $\mathbb{P}$-genérico. Si el axioma de elección llegara a valer en N, tome $k = |P(\omega)|$ en N entonces tenemos

$$\Vdash_{1_{\mathbb{P}}} (\check{k} = |P(\omega)|)^{HOD(P(\omega))}$$

Ahora si tomamos J de tal forma que en M, $|J| > k$ entonces dado $\mathbb{Q} = fin(J \times \omega \to 2)$ y G_1, $\mathbb{Q}$ genérico entonces

$$\nVdash_{1_{\mathbb{Q}}} (\check{k} = |P(\omega)|)^{HOD(P(\omega))}$$

ya que $\bigcup G_1$ sería como vimos anteriormente una $|J|$-enumeración de funciones distintas de ω en 2, y además $\mathbb{Q}$ cumple c.c.c; pero esto es una contradicción respecto al lema anterior . $\square$

0.2. Intuicionismo

En este momento no es de nuestro interés hacer una presentación de la filosofía constructivista que motivo el intuicionismo, sin embargo remitimos al lector como ya habíamos dicho antes a [Van] para una introducción a este tema o a [Go] donde se hace una sencilla y hermosa aproximación al mismo.

La lógica intuicionista fue el intento llevado a cabo por *Arend Heyting* de crear un sistema axiomático que encerrara las bases del razonamiento constructivista propuesto por *Brouwer* como critica a los fundamentos clásicos de las matemáticas. Independiente de esto simplemente nos podemos aproximar a ésta viéndola como una lógica mas débil que nuestra lógica clásica, donde su sistema deductivo esta conformado por los mismos axiomas que el sistema clásico a excepción del axioma $\varphi \vee \neg\varphi$ (el tercio excluso). Como veremos esta simple omisión va a tener consecuencias notables que serán evidentes por ejemplo en la construcción de una semántica para dicha lógica, pues bien la omisión de este axioma determinara que no estaremos trabajando en un sistema con dos valores de verdad.

0.2.1. Lógica de proposiciones y predicados

Dada φ notaremos $\vdash_i \varphi$ cuando φ se pueda deducir en el sistema deductivo del intuicionismo (ver [Van]). El primer resultado que tenemos es

$$\text{Si } \vdash_i \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

es decir que la lógica intuicionista esta contenida en la lógica clásica. Veremos ahora tautologías clásicas que no se verifican en el intuicionismo.

$$\nvdash_i \varphi \vee \neg\varphi$$

$$\nvdash_i \neg\neg\varphi \to \varphi$$

$$\nvdash_i \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$$

Además los conectivos $\neg, \wedge, \vee, \to$ no pueden ser definidos en términos de los otros. Por otro lado si se verifican

$$\vdash_i \varphi \to \neg\neg\varphi$$

$$\vdash_i \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$$

$$\vdash_i \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$$

Otros hechos importantes para ver las diferencias entre el sistema deductivo clásico y el intuicionista son:

Lema 0.5. *1.* $\vdash_i \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$
2. $\vdash_i (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$
3. $\vdash_i (\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$
4. $\vdash_i \neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$
5. $\vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$
.

Una observación siempre que la implicación, $\to$, va en un solo sentido es por que la otra dirección falla.

Lema 0.6 (Leyes de De Morgan). *1.* $\vdash_i \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
2. $\vdash_i (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

Lema 0.7. *1.*$\vdash_i \neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$
2. $\vdash_i \exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$
3. $\vdash_i \neg\neg\forall x\varphi(x) \to \forall x\neg\neg\varphi(x)$
4. $\vdash_i \exists x\neg\neg\varphi \to \neg\neg\exists x\varphi(x)$
5. $\nvdash_i (\varphi \to \exists x\psi(x)) \to \exists x(\varphi \to \psi(x))$

Lema 0.8. *Si φ no tiene los conectivos $\vee$ o $\exists$ y además todos las formulas atómicas en φ aparecen negadas*

$$\vdash_i \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

Como vimos anteriormente la lógica proposicional y de predicados intuicionista es un subsistema de la lógica clásica, sin embargo existe una forma de sumergir la lógica clásica en la intuicionista, mostrando que ambas tienen la misma fuerza deductiva, es decir que todo teorema clásico tendrá una variante clásicamente equivalente que será un teorema intuicionista.

Definición 0.10 (Traducción de Gödel). *Dada una formula φ por inducción en formulas definimos φ^G de la siguiente manera:*
1. $\varphi^G = \neg\neg\varphi$ *si φ es una formula atómica.*
2. $(\varphi \wedge \psi)^G = \varphi^G \wedge \psi^G$
3. $(\varphi \vee \psi)^G = \neg(\neg\varphi^G \wedge \neg\psi^G)$
4. $(\varphi \to \psi)^G = \varphi^G \to \psi^G$
5. $(\neg\varphi)^G = \neg(\varphi^G)$
6. $(\forall x\varphi)^G = \forall x(\varphi^G)$

Lema 0.9. $\vdash_i \varphi^G \Leftrightarrow \vdash \varphi$

Existe otra traducción que en ciertos contextos puede ser más conveniente que la anterior y donde el papel de la doble negación será más explícito.

Definición 0.11 (Traducción de Gödel-Kolmogorov). *Dada φ una formula definimos φ^{GK} de la siguiente manera:*
1. $\varphi^{GK} = \neg\neg\varphi$ *si* φ *es atómica.*
2. $(\varphi \wedge \psi)^{GK} = \neg\neg(\varphi^{GK} \wedge \psi^{GK})$
3. $(\varphi \vee \psi)^{GK} = \neg\neg(\varphi^{GK} \vee \psi^{GK})$
4. $(\neg\varphi)^{GK} = \neg\neg(\neg\varphi^{GK})$
5. $(\varphi \rightarrow \psi)^{GK} = \neg\neg(\varphi^{GK} \rightarrow \psi^{GK})$
6. $(\forall x\varphi)^{GK} = \neg\neg\forall x(\varphi^{GK})$
7. $(\exists x\varphi)^{GK} = \neg\neg\exists x(\varphi^{GK})$

Antes de terminar esta parte unos resultados respecto a estas traducciones que más adelante serán de utilidad.

Lema 0.10. *1.* $\vdash_i \varphi^{GK} \leftrightarrow \varphi^G$
2. Si en φ *todo* $\forall$ *esta seguido de* $\neg$ *entonces*

$$\vdash_i \varphi^{GK} \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

3. Si transformamos φ *en* φ' *reemplazando cada aparición de* $\forall$ *por* $\neg\exists\neg$ *entonces*

$$\vdash_i \varphi^{GK} \leftrightarrow \varphi'$$

0.2.2. Semántica de Kripke

La primera dificultad en crear una semántica para el sistema axiomático del intuicionismo es la no validez del principio del tercio excluso, pues este condiciona fuertemente la semántica clásica. Nuestro primer paso sera entender de que manera se puede interpretar la noción de verdad dentro de este. Una de estas interpretaciones nos dice que dada una sentencia no podemos afirmar si es cierta o falsa de manera categórica, pero podemos afirmar si en ciertos *instantes* lo es o no, es decir, en los instantes donde ha sido constructivamente determinada. Así estos instantes se pueden interpretar como estados del conocimiento en donde se verifican los hechos construidos hasta ese momento. Diremos entonces que una sentencia será verdadera o falsa en cierto instante o estado. Obviamente debe haber una relación entre estos estados, es decir seguramente muchos de estos permitirán ampliar constructivamente sus verdades en instantes futuros donde las nociones de verdad pasadas se mantienen y se extienden, es decir si una sentencia es verdad en cierto instante deberá ser verdad en el futuro. Si queremos precisar esto podemos pensar esos estados y sus relaciones como un orden parcial (no necesariamente lineal), y una valuación le asignará a cada sentencia los nodos del orden donde esta es verdad.

Entramos ahora a definir los principios de esta semántica rigurosamente.

Definición 0.12. *Dado* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *un orden parcial y* $A \subseteq \mathbb{P}$ *decimos que* A *es hereditario si y sólo si*

$$\textit{Siempre que } p \in A \textit{ y } q \geq p \Rightarrow q \in A$$

Notaremos a la colección de subconjuntos hereditarios de $\mathbb{P}$ *como* $\mathbb{P}^+$.

Definición 0.13. *Dado* $\mathbb{P}$ *un orden parcial una* $\mathbb{P}$*-valuación es una función*

$$Val : \Phi \rightarrow \mathbb{P}^+$$

donde Φ *es un conjunto de variables. Un modelo basado sobre* $\mathbb{P}$*, es un par* $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{P}, Val \rangle$ *donde* Val *es una valuación. Se puede extender la noción de verdad para todas la sentencias formadas a partir de* Φ *en cierto instante* $p \in \mathbb{P}$*:*
1. $\mathfrak{A} \models_p \pi_i$ *para* $\pi_i \in \Phi$ *ssi* $p \in V(\pi_i)$.
2. $\mathfrak{A} \models_p \varphi \wedge \psi$ *ssi* $\mathfrak{A} \models_p \varphi$ *y* $\mathfrak{A} \models_p \psi$.
3. $\mathfrak{A} \models_p \varphi \vee \psi$ *ssi* $\mathfrak{A} \models_p \varphi$ *o* $\mathfrak{A} \models_p \psi$.
4. $\mathfrak{A} \models_p \neg\varphi$ *ssi para todo* $q \geq p$ $\mathfrak{A} \not\models_q \varphi$.
5. $\mathfrak{A} \models_p \varphi \rightarrow \psi$ *ssi para todo* $q \geq p$ *si* $\mathfrak{A} \models_q \varphi$ *entonces* $\mathfrak{A} \models_q \psi$.
Diremos que φ *es verdad en el modelo* $\mathfrak{A}$ *(*$\mathfrak{A} \models \varphi$*) si para todo* $p \in \mathbb{P}$, $\mathfrak{A} \models_p \varphi$. φ *será verdad para la estructura* $\mathbb{P}$ *(*$\mathbb{P} \models \varphi$*) si* φ *es verdad en todo modelo* $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{P}, Val \rangle$ *basado sobre* $\mathbb{P}$.

0.2.3. Modelos de Kripke

Consideraremos un tipo de semántica más general que la que definimos anteriormente que va a ser de constante referencia de aquí en adelante.

Definición 0.14. $\mathbb{K} = \langle \mathbb{P}, \leq, (K_p)_{p\in\mathbb{P}}, (f_{pq})_{(p,q)\in\mathbb{P}} \rangle$ *es un modelo de Kripke de tipo* τ *si:*
i. $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *es un orden parcial.*
ii. Para cada $p \in \mathbb{P}$, K_p *es una estructura clásica de tipo* τ.
iii. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ *si* $p \leq q$ *entonces existe*

$$f_{pq} : K_p \to K_q$$

un homomorfismo tal que $f_{pp} = id_{K_p}$ *y para* $t \geq q \geq p$, $f_{qt} \circ f_{pq} = f_{pt}$

Definición 0.15 (El forzamiento de Kripke). *Dado* $\mathbb{K} = \langle \mathbb{P}, \leq, (K_i)_{i\in\mathbb{P}}, (f_{pq})_{(p,q)\in\mathbb{P}} \rangle$ *un modelo de Kripke definimos para* $p \in \mathbb{P}$ *la relación* $\Vdash_p \varphi$ *(en el nodo* p *se fuerza o es verdad la formula* φ*) de la siguiente manera:*
1. $\Vdash_p a_1 = a_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$
2. $\Vdash_p R(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow (a_1, ..., a_n) \in R^{K_p}$
3. $\Vdash_p (\varphi \to \psi)[a_1, ..., a_n] \Leftrightarrow \forall q \geq p, \Vdash_q \varphi[f_{pq}(a_1), ..., f_{pq}(a_n)] \Rightarrow \Vdash_q \psi[f_{pq}(a_1), ..., f_{pq}(a_n)]$.
4. $\Vdash_p \neg\varphi[a_1, ..., a_n] \Leftrightarrow \forall q \geq p : \nVdash_q \varphi[f_{pq}(a_1), ..., f_{pq}(a_n)]$.
5. $\Vdash_p \exists x\varphi(x)[a_1, ..., a_n] \Leftrightarrow$ *existe* $a \in K_p$ *tal que* $\Vdash_p \varphi[a, a_1, ..., a_n]$.
6. $\Vdash_p \forall x\varphi(x)[a_1, ..., a_n] \Leftrightarrow \forall q \geq p \quad \forall b \in K_q : \Vdash_q \varphi[b, f_{pq}(a_1), ..., f_{pq}(a_n)]$.

Capítulo 1

Haces de Estructuras

A continuación presentaremos parte del trabajo presentado en [Ca] con la motivación de que un lector ajeno al tema le baste con está para seguir las ideas de este trabajo. Sin embargo recomendamos al lector remitirse a este articulo donde se hace una presentación magistral del tema. El objetivo será definir un tipo de estructuras de objetos variables y entender la lógica que los gobiernan. Remitimos al lector a [Ca] para la motivación epistemológica de dicha construcción la cual fue una de las principales motivaciones de este trabajo.

1.1. Introducción

Los haces de estructuras van a estar constituidos por objetos variables los cuales varían sobre una estructura (a frame) de *" estados del conocimiento"*. Para entender esto podemos pensar estos estados del conocimiento como por ejemplo estados espacio-temporales, y a nosotros como los objetos variables; es decir somos objetos variables a través de estados espacio-temporales y algo sumamente importante nuestras verdades o propiedades son fuertemente dependientes de estas extensiones espacio-temporales. Esta última observación es fundamental, a diferencia de nuestra lógica clásica donde las verdades acerca de objetos son absolutas e independientes de todo contexto, la lógica de estos objetos variables va estar condicionada por un principio de verdad muy natural, *"Una afirmación es verdad acerca de un objeto si es verdad en una extension donde este se encuentre"*. Para precisar esto podemos referirlo en nociones matemáticas que dominemos, por ejemplo estas extensiones o estados podemos tratarlas como vecindades en cierto espacio topológico y los objetos serían entonces funciones cuyas imágenes determinarían sus características cierto instante o contexto.

1.2. Haces

La noción de haz sobre un espacio topológico fue de suma importancia en los desarrollos de las matemáticas de finales del siglo pasado y aún hoy sigue jugando un papel fundamental en los desarrollos contemporáneos. Es en esta noción donde originalmente estuvo la motivación de la construcción que vamos a realizar, ya bien Lawvere fue quien propuso que un haz puede verse como una estructura variable, es decir un haz de grupos no lo constituyen una gran variedad de grupos, sino un solo grupo que esta variando sobre el espacio base. Presentamos ahora la definición de un haz sobre un espacio topológico y un par de propiedades que nos serán fundamentales.

Definición 1.1. *Dado X un espacio topológico, un haz sobre X es una pareja $\langle E, p\rangle$ donde E es un espacio topológico y*

$$p : E \to X$$

es un homomorfismo local, es decir una función para la cual dado $e \in E$ existe S vecindad de e tal que:

$$1.p(S) \text{ es abierto en } X$$

2.$p\restriction_{[s)}: S \to P(S)$ es un homeomorfismo

Los abiertos de E que cumplen 1 y 2 forman una base para la topología en E, ya bien de la definición es claro que para todo $e \in E$ existe S abierto en E que cumple 1 y 2. Por otro lado si $e \in S_1 \cap S_2$ donde S_1 y S_2 son abiertos de E que cumplen 1 y 2, $S_1 \cap S_2$ es un abierto de E que cumple 1 y 2.

Definición 1.2. *Dado un haz (o un fibrado) $\langle E, p\rangle$ sobre X y U un abierto de X, una sección local de $\langle E, p\rangle$ sobre U es una función continua*

$$\sigma : U \to E$$

tal que $p \circ \sigma = id_U$. Decimos que σ es una sección global si $U = X$.

Lema 1.1. *Dada $\sigma : U \to E$ una sección de $\langle E, p\rangle$ sobre U:*
i. $\sigma(U)$ es abierto.
ii. $\{\sigma(U) : U \subseteq X abierto\ y\ \sigma\ sección\}$ forman una base para la topología en E.
iii. Si dos secciones coinciden en un punto $x \in X$ entonces coinciden en toda una vecindad de x.

1.3. Haces de Estructuras

Definimos ahora la estructura de nuestros objetos variables. Ya debe ser claro que esta va estar constituida por un haz sobre un espacio topológico, cuyas fibras van a ser esos estados o extensiones, y las secciones van a constituir nuestros objetos variables, que varían sobre su dominio, donde para cada $x \in X$, $\sigma(x)$ si esta definida será simplemente la descripción en un instante, del objeto σ.

Definición 1.3. *Dado un vocabulario de primer orden L, un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ de tipo L sobre X consta de:*
a-) Un haz $\langle E, p\rangle$ sobre X.
b-) Para cada $x \in X$, una estructura $\mathfrak{A}_x$ de tipo L con la fibra $E_x = p^{-1}(x)$ como universo donde se verifica:
i. $R^{\mathfrak{A}} = \bigcup_x R_x$ es abierto en $\bigcup_x E_x^n$ visto como subespacio de E^n, donde R es símbolo de relación n-aria.
ii. La función

$$f^{\mathfrak{A}} = \bigcup_x f_x : \bigcup_x E_x^m \to \bigcup_x E_x$$

es continua para f símbolo de función con m parámetros.
iii. $h : X \to E$ tal que $h(x) = c_x$, donde c es símbolo de constante, es continua.

Definición 1.4. *Sea L_τ el conjunto de formulas de primer orden de tipo τ. Dado un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ de tipo τ sobre X, definimos inductivamente para $\varphi(v_1, ..., v_n) \in L_\tau$, $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ ($\mathfrak{A}$ fuerza $\varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ en x para las secciones $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de $\mathfrak{A}$ definidas en $x \in X$):*
1. Si φ es atómica y $t_1, ..., t_k$ son términos de tipo τ sobre X:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x (t_1 = t_2)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)] = t_2^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)]$$

$$\mathfrak{A} \Vdash_x R(t_1, ..., t_n)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)], ..., t_n^{\mathfrak{A}_x}[\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x)]) \in R_x$$

2. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \wedge \psi)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ y $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$

3. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \vee \psi)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ o $\mathfrak{A} \Vdash_x \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.

4. $\mathfrak{A} \Vdash_x \neg\varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow$ existe U vecindad de x tal que para todo $y \in U$, $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.

5. $\mathfrak{A} \Vdash_x (\varphi \to \psi)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow$ Existe una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$ si $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ entonces $\mathfrak{A} \Vdash_y \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.

6. $\mathfrak{A} \Vdash_x \exists v \varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe σ definida en x tal que $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n)$

7. $\mathfrak{A} \Vdash_x \forall v \varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ existe U vecindad de x tal que para todo $y \in U$ y para toda σ definida en y, $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n]$.
(Para 4,5,7 $\quad U \subseteq \bigcap_i dom(\sigma_i)$)

Corolario 1.1. $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *si solo si existe una vecindad* U *de* x *tal que* $\mathfrak{A} \Vdash_y \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *para todo* $y \in U$

El corolario anterior confirma el principio de verdad, del que hablamos al comienzo, la verdad puntual implica una verdad contextual.

1.4. Semántica Local, Semántica de Kripke-Joyal

A partir de la noción de verdad en puntos sobre el espacio base que nos permitió construir la semántica sobre los haces de estructuras, construiremos una noción de verdad sobre extensiones (abiertos de un espacio topológico). Posterior a esto veremos como se comporta esta respecto a conectivos y cuantificadores estableciendo una nueva semántica.

Definición 1.5. *Dado* $U \subset X$ *y secciones* σ_i *definidas en* U*, se define*

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \text{ Para todo } x \in U \ \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$$

Teorema 1.1 (Semántica De Kripke Joyal). $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *queda definido por:*
1. Si φ *es atómica:*
$\mathfrak{A} \Vdash_U \sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1 \restriction_U = \sigma_2 \restriction_U$.
$\mathfrak{A} \Vdash_U R[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow (\sigma_1, ..., \sigma_n)(U) \subseteq R^{\mathfrak{A}}$.
2. $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \wedge \psi)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_U \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *y* $\mathfrak{A} \Vdash_U \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
3. $\mathfrak{A} \Vdash_U (\varphi \vee \psi)[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow$ *existen abiertos* V, W *tales que* $U = V \cup W$ *y* $\mathfrak{A} \Vdash_V \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *y* $\mathfrak{A} \Vdash_W \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
4. $\mathfrak{A} \Vdash_U \neg\varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow$ *Para todo* $W \subseteq U, \quad W \neq \emptyset, \quad \mathfrak{A} \nVdash_W \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
5. $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi \to \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n] \Leftrightarrow$ *Para todo* $W \subset U$*,* *si* $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ *entonces* $\mathfrak{A} \Vdash_W \psi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
6. $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ *existe un recubrimiento abierto* $\{U_i\}_i$ *de* U *y secciones* μ_i *definidas en* U_i *tales que* $\mathfrak{A} \Vdash_{U_i} \varphi[\mu_i, \sigma_1, ..., \sigma_n]$ *para todo* i.
7. $\mathfrak{A} \Vdash_U \forall\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n) \Leftrightarrow$ *para todo* $W \subset U$ *y* μ *definida en* W*,* $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi(\mu, \sigma_1, ..., \sigma_n)$.

Dado $U \subseteq X$, notaremos $\mathfrak{A}(U)$ al conjunto de secciones definidas en U.

1.5. Modelos de Kripke como Haces

Un hecho importante y por demás interesante, es que las leyes lógicas que satisfacen los haces coinciden con las del intuicionismo. Ya bien, veremos que en cada modelo de Kripke podemos encontrar de manera natural un haz implícito.

Dado $\mathbb{K} = \langle \mathbb{P}, \leq, \{K_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\}_{(i,j) \in \leq} \rangle$ un modelo de Kripke de tipo τ, podemos interpretar a este como un haz de estructuras de la siguiente manera: Como $\mathbb{P}$ esta parcialmente ordenado lo podemos dotar con la topología natural $\mathbb{P}^+ = \{S \subseteq \mathbb{P} : \text{para todo } i \in S \text{ si } j \geq i \text{ entonces } j \in S\}$ de los subconjuntos hereditarios de $\mathbb{P}$. Esta topología tiene como base natural a los conjuntos $[q) = \{t \in \mathbb{P} : t \geq q\}$. Ahora para cada q tome como su fibra a $K_q = p^{-1}(q)$ y dotamos a

$$E = \dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{P}} K_q$$

con la topología generada por las imágenes de las secciones $\sigma := (a_i)_{i \in U}$ donde $a_i \in K_i$ y $U \in \mathbb{P}^+$ y tales que $f_{ij}(a_i) = a_j$ para $i \leq j$. De esta manera se transforma de manera natural a $\mathbb{K}$ en el haz de estructuras $\mathbb{K}^*$ de tipo τ sobre $X = \mathbb{P}$.

A cada $a \in K_q$ le podemos asignar de manera canónica la sección

$$\sigma_a : [q) \to E$$

$$\sigma_a(t) = f_{qt}(a)$$

Esta asociación define un isomorfismo entre K_q y $K^*([q))$ tal que a f_{qt} la manda a la restricción $\rho_{[q)[t)}$.

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un modelo de Kripke y $\mathbb{K}^*$ el haz asociado entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i. $\mathbb{K} \Vdash_q \varphi[a_1, ..., a_n]$
ii. $\mathbb{K}^* \Vdash_q \varphi[\sigma_{a_1}, ..., \sigma_{a_n}$
iii.$\mathbb{K}^* \Vdash_{[q)} \varphi[\sigma_{a_1}, ..., \sigma_{a_n}]$. $\square$

1.6. Modelos Genéricos

La construcción que realizaremos a continuación será de suma importancia para establecer las conexiones entre nuestros haces de estructuras y estructuras clásicas. El proceso en pocas palabras es colapsar nuestro haz de estructuras via un filtro genérico sobre los abiertos del espacio base, a un modelo, definiendo la genericidad de tal forma que en el proceso de colapso nos resulte un modelo clásico es decir un modelo con dos valores de verdad. Es importante notar que este proceso a su vez determinará valiosas conexiones entre la lógica clásica y la lógica intuicionista, además se definirá una noción de genérico mas general que a diferencia de la definición del forcing clásico no requerirá ningún tipo de condición sobre enumerabilidad.

Definición 1.6. *Sea X un espacio topológico y $Ab(X)$ su familia de subconjuntos abiertos. Una subfamilia $\mathcal{F} \subset Ab(X)$ es un filtro de abiertos sobre X si:*
i. $X \in \mathcal{F}$.
ii. $U, V \in \mathcal{F}$ *implica* $U \cap V \in \mathcal{F}$.
iii.Dado $V \in \mathcal{F}$ *si* $V \subset U$ *entonces* $U \in \mathcal{F}$.

Definición 1.7. *Sea $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras de tipo τ sobre un espacio topológico X. Dado un filtro $\mathcal{F}$ no trivial de abiertos de X, decimos que es genérico para $\mathfrak{A}$ si:*
i. Dada $\varphi(v_1, ..., v_n)$ y $\sigma_1, ..., \sigma_n$ secciones arbitrarias de $\mathfrak{A}$ definidas en $U \in \mathcal{F}$, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$ o $\mathfrak{A} \Vdash_W \neg\varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
ii. Para $\sigma_1, ..., \sigma_n$ secciones arbitrarias de $\mathfrak{A}$ definidas en $U \in \mathcal{F}$, y $\varphi(v, v_1, ..., v_n)$ una formula de primer orden. Si $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n)$ entonces existe $W \in \mathcal{F}$ y σ definida en W para la cual $\mathfrak{A} \Vdash \varphi(\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n)$.

Lema 1.2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro maximal de abiertos sobre un espacio topológico X; tenemos:*
i.Dado W un abierto denso en U para $U \in \mathcal{F}$ entonces $W \in \mathcal{F}$.
ii.Si $U \in AB(X)$ entonces $U \in \mathcal{F}$ o $Int(X - U) \in \mathcal{F}$

Teorema 1.3. *Dado X un espacio topológico, una filtro maximal de abiertos sobre X es genérico para cualquier haz de estructuras sobre X.*

Demostración. i. Sea $\mathcal{F}$ un filtro maximal de abiertos sobre X, $\varphi(v_1, ..., v_n)$ una formula arbitraria y $\sigma_1, ..., \sigma_n$ secciones en un haz $\mathfrak{A}$ definidas en $U \in \mathcal{F}$. Sea $B = \{x \in U : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi(\sigma_1, ..., \sigma_n)\}$ si $B \notin \mathcal{F}$ entonces $C = Int(X - B) = Int(\{x \in U : \mathfrak{A} \nVdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]\} \cup (X - U))$ pertenece a $\mathcal{F}$. $D = C \cap U = Int\{x \in U : \nVdash_x \varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]\} \in \mathcal{F}$ y $\mathfrak{A} \Vdash_D \neg\varphi[\sigma_1, ..., \sigma_n]$.
ii.Si para $U \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{A} \Vdash_U \exists v\varphi(v, \sigma_1, ..., \sigma_n)$ entonces existe un abierto W denso en U y σ sección definida sobre W tal que $\mathfrak{A} \Vdash_W \varphi[\sigma, \sigma_1, ..., \sigma_n]$, además como W es denso sobre U entonces $W \in \mathcal{F}$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Definición 1.8. *Dado $\mathfrak{A}$ un haz de estructuras sobre X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, podemos asociar un modelo clásico al haz considerando:*

$$\mathfrak{A}[\mathcal{F}] = \lim_{\to U \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}(U)$$

es decir

$$\mathfrak{A}[\mathcal{F}] = \dot{\bigcup}_{U \in \mathcal{F}} \mathfrak{A}(U)/_{\sim_{\mathcal{F}}}$$

donde dados $\sigma \in \mathfrak{A}(U)$ y $\mu \in \mathfrak{A}(V)$

$$\sigma \sim_{\mathcal{F}} \mu \Leftrightarrow \text{ existe } W \in \mathcal{F} \text{ tal que } \sigma \restriction_W = \mu \restriction_W$$

Notaremos como $[\sigma]$ la clase de σ. Definimos entonces las relaciones y las funciones de la siguiente manera:

$$([\sigma_1], ..., [\sigma_n]) \in R^{\mathfrak{A}[\mathcal{F}]} \Leftrightarrow \text{ existe } U \in \mathcal{F} : (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in R^{\mathfrak{A}(U)}$$
$$f^{\mathfrak{A}[\mathcal{F}]}([\sigma_1], ..., [\sigma_n]) = [f^{\mathfrak{A}(U)}(\sigma_1, ..., \sigma_n)]$$

Si $\mathcal{F}$ es un filtro genérico sobre X para $\mathfrak{A}$ entonces diremos que $\mathfrak{A}[\mathcal{F}]$ es un modelo genérico.

Teorema 1.4 (Teorema del Modelo Genérico). *Dado $\mathcal{F}$ un filtro genérico sobre X para $\mathfrak{A}$, tenemos entonces:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}[\mathcal{F}] \models \varphi([\sigma_1], ..., [\sigma_n]) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } U \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathfrak{A} \Vdash_U \varphi^G(\sigma_1, ..., \sigma_n) \\ &\Leftrightarrow \quad \{x \in X : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi^G(\sigma_1, ..., \sigma_n)\} \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

Donde φ^G es la traducción de Gödel de la formula φ.

1.7. La Jerarquía Cumulativa de los Conjuntos Variables

A pesar de lo fructífero que ha resultado el forcing clásico, no deja de ser una caja mágica de resultados cuyo entendimiento depende de ciertas habilidades combinatorias que se deben poseer. Fue motivación original de este trabajo entender que hay detrás de dicha construcción. Presentaremos a continuación una interpretación del forcing clásico que imita la construcción de la jerarquía clásica de conjuntos, para conjuntos variables, la cual via modelos genéricos nos permitirá obtener los resultados clásicos de independencia como la independencia el axioma de elección y la hipótesis del continuo.

Definición 1.9. *Dado X un espacio topológico arbitrario definimos la jerarquía cumulativa de los conjuntos variables sobre X de la siguiente manera: Dado $U \in Ab(X)$ definimos,*

$$V_0(U) = \emptyset$$

$$\begin{gathered}V_{\alpha+1}(U) = \{f : Ab(U) \to \bigcup_{W \subseteq U} P(V_\alpha(W)) : 1. W \subseteq U \text{ implica } f(W) \subset V_\alpha(W) \wedge \\ 2. V \subseteq W \subseteq U \text{implica que para todo } g \in f(W)(g \restriction_{Ab(V)} \in f(V)) \wedge \\ 3. \text{Dado } \{U_i\}_i \text{ un recubrimiento abierto de } U, \text{ y dadas } g_i \in f(U_i) \\ \text{para cada } i, \text{ tales que dados } i, j,\ g_i \restriction_{Ab(U_i \cap U_j)} = g_j \restriction_{Ab(U_i \cap U_j)}, \\ \text{entonces existe } g \in f(U) \text{ para la cual dado } i,\ g \restriction_{Ab(U_i)} = g_i\}\end{gathered}$$

$$V_\lambda(U) = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha(U) \text{ Si } \lambda \text{ es un ordinal limite}$$

$$V(U) = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha(U)$$

Para cada $U \in Ab(U)$ y $\alpha \in On$ el conjunto $V_\alpha(U)$ es un conjunto de funciones definidas en $Ab(U)$, cuyos valores para $W \in Ab(U)$ son a su vez funciones en $Ab(W)$, cuyos valores para $V \in Ab(W)$ son conjuntos de funciones en $Ab(V)$ y así hereditariamente. El siguiente paso fundamental es definir la pertenencia en estos modelos, de manera natural se define

$$\Vdash_U f \in g \Leftrightarrow f \in g(U)$$

.

Ahora bien esto no es un haz de estructuras pero le podemos asociar uno unívocamente como vamos a ver a continuación. Observe que V es una asignación la cual a cada $U \in AB(X)$ le esta asignando una estructura $V(U)$ de cierto tipo, además por la segunda propiedad en la definición de $V_{\alpha+1}$ note que para $W \subseteq U$, la restricción

$$\rho_{UV} : V(U) \to V(W)$$

es un homomorfismo para el cual vale $\rho_{UU} = id_U$ y $\rho_{WY} \circ \rho_{UW} = \rho_{UY}$ para $Y \subseteq W \subseteq U$. Podemos introducir entonces una definición más general.

Definición 1.10. *Un prehaz de estructuras de tipo τ sobre un espacio topológico X es una asignación Γ, la cual para cada abierto $U \subseteq X$, le asigna $\Gamma(U)$ una estructura de tipo τ y un homomorfismo*

$$\Gamma_{UW} : \Gamma(U) \to \Gamma(W)$$

para cada inclusion $W \subseteq U$, tal que $\Gamma_{UU} = id_U$ y $\Gamma_{WY} \circ \Gamma_{UW} = \Gamma_{UW}$ para $Y \subseteq W \subseteq U$

Para un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ sobre X podemos asociar un prehaz $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ de manera natural. A saber para cada $U \in Ab(X)$ le asignamos $\mathfrak{A}(U)$ el cual sabemos que hereda una estructura del mismo tipo de $\mathfrak{A}$, y el homomorfismo $\rho_{UW} : \mathfrak{A}(U) \to \mathfrak{A}(W)$ la restricción para $W \subseteq U$.

Definición 1.11. *A todo prehaz Γ de tipo τ sobre X le podemos asociar un haz $\mathfrak{A}_\Gamma$ de gérmenes sobre X de tipo τ de la siguiente manera. Para cada $x \in X$, $\mathfrak{A}_\Gamma$ tiene por fibra en x a*

$$(\mathfrak{A}_\Gamma)_x = \dot{\bigcup}_{U \text{ vecindad de } x} \Gamma(U)/_{\sim_x}$$

Donde si $a \in \Gamma(U)$ y $b \in \Gamma(V)$

$$a \sim_x b \Leftrightarrow \text{ existe } W \text{ vecindad de } x \text{ tal que } W \subseteq U \cap V : \Gamma_{UW}(a) = \Gamma_{VW}(b)$$

Denotemos como $[a]_x$ a la clase de a, que es a lo que se llama el germen en x. definimos las relaciones y funciones de la siguiente manera:

$$([a_1]_x, ..., [a_n]_x) \in R_x \Leftrightarrow \text{ existe } U \text{ vecindad de } x \text{ tal que } (a_1, ..., a_n) \in R^{\Gamma(U)}$$

$$f_x([a_1]_x, ..., [a_n]_x) = [f^{\Gamma(U)}(a_1, ..., a_n)]_x$$

Dotamos al espacio de fibras $E^* = \dot{\bigcup}_x (\mathfrak{A}_\Gamma)_x$ con la topología inducida por las imágenes de las secciones

$$\sigma_a : U \to E^*$$

$$\sigma_a(x) = [a]_x$$

para cada $a \in \Gamma(U)$ y $U \in Ab(X)$.

Teorema 1.5. *Dado un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ si $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ es es su prehaz de secciones asociado entonces $\mathfrak{A}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}}$ resulta ser homeomorfo-isomorfo al haz $\mathfrak{A}$. Lo que es equivalente a decir que existe un homeomorfismo*

$$\Psi : E^* \to E$$

que envía isomorficamente a cada fibra de gérmenes $(\mathfrak{A}_{\Gamma_{\mathfrak{A}}})_x$ a la fibra $\mathfrak{A}_x$.

Demostración. Defina

$$\Psi : E^* \to E$$

$$\Psi([\sigma]_x) = \sigma(x)$$

□

La propiedad 3 en la definición del prehaz V de la jerarquía de los conjuntos variables determina que los elementos f en la definición de $V_{\alpha+1}$ constituyen lo que va ser llamado un subprehaz exacto. Esto sera importante porque determina que el proceso de germinación para un prehaz exacto Γ sea inverso al proceso de obtener un prehaz a partir del haz $\mathfrak{A}_\Gamma$. Es decir vamos a tener que $\Gamma(U) \cong \Gamma_{\mathfrak{A}_\Gamma}$ de tal manera que el isomorfismo manda a Γ_{UV} en la restricción ρ_{UV}.
El teorema anterior y los comentarios posterior a este nos dan la posibilidad de considerar indistintamente a los prehaces exactos y sus haces de estructuras asociados. En particular para el caso de nuestro prehaz exacto anterior V, construir el haz asociado puede ser muy complicado pero modulo las construcciones anteriores podemos identificar a las secciones de $\mathfrak{A}_V(U)$ con los elementos de $V(U)$ y con esto resulta posible probar el siguiente resultado.

Teorema 1.6. *Para todo espacio topológico X*

$$\mathfrak{A}_V \Vdash_X ZF$$

donde ZF son los axiomas de Zermelo-Fraenkel

Mostraremos mas adelante este resultado para el caso particular donde X es un orden parcial dotado con la topología de sus subconjuntos hereditarios, mas aún veremos que en este caso inclusive se fuerza el axioma de elección. Como un corolario inmediato al teorema anterior tenemos.

Teorema 1.7. *Dado $\mathcal{F}$ un filtro genérico de abiertos sobre un espacio topológico X*

$$\mathfrak{A}_V[\mathcal{F}] \models ZF$$

Capítulo 2

La Jerarquía Cumulativa sobre un orden parcial

En el capitulo anterior vimos como construir la jerarquía cumulativa de conjuntos variables para un espacio topológico arbitrario, via un prehaz de estructuras, sin embargo la construcción del haz de gérmenes de este prehaz resultaba un poco abstracta. A continuación presentaremos esta construcción tomando como espacio topológico un orden parcial, bajo la topología de sus subconjuntos hereditarios, en este caso particular en cierto sentido podremos trabajar directamente con el haz de gérmenes. Este sera un modelo de Kripke el cual constituirá una verdadera jerarquía de conjuntos variables.

2.1. Introducción

Presentamos ahora otra aproximación a las estructuras de objetos variables en este caso mas relacionada con la jerarquía de conjuntos que entramos a definir, esta se desprende de la interpretación que los categoristas hacen de los objetos de $SET^{\mathbb{P}}$, donde hablan de estos como $Conjuntos - concepto$, es esta noción la que entramos a explicar a continuación. Según el axioma de comprensión, dada $\varphi(x)$, una propiedad sobre x, para cualquier conjunto A podemos construir un conjunto B, tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y $\varphi(x)$ es "verdad"para x. En la estructura que entramos a definir a continuación, la noción de verdad no será absoluta, como en las construcciones clásicas de la teoría de conjuntos; sino más bien será una noción de verdad que depende del contexto, en cierto sentido una noción de verdad más natural. Podemos tratar de entender esto considerando el siguiente ejemplo: Sea $\varphi(x)$ la siguiente afirmación, "x es par mayor o igual a 4, y, x se puede escribir como la suma de dos numeros primos". En este instante (7:42 pm del 22 de diciembre de 2003), no podemos afirmar que $\{x : \varphi(x)\} = \{x : x \geq 4 \wedge (x \text{ es par})\}$, la conjetura de Goldbach, pero φ nos ayuda a determinar un conjunto en este instante p,

$$\varphi(p) = \{x : \varphi(x) \text{ es verdad en el instante } p\}$$

Seguramente se debe haber verificado la conjetura de Goldbach para un número gigantesco de numeros, pero probablemente (quizás no) en un instante futuro q, $\varphi(q)$ haya crecido y hasta es probable que $\varphi(q) = \{x : x \geq 4 \wedge \text{ (x es par)}\}$, pero lo importante es observar, que φ envés de definir un conjunto absoluto, lo podemos ver mas bien como un conjunto variable que varia sobre una *biblioteca* de los estados del conocimiento. Sería entonces natural pensar, que esta *biblioteca* de los estados del pensamiento sea un orden parcial, no necesariamente lineal, donde exista la posibilidad de evoluciones alternas por ejemplo una evolución donde la conjetura de Goldbach sea verdadera y otra donde no. Sería de esperar también que en cada nodo o instante p en este modelo se levante una estructura muy similar al modelo clásico de la teoría de conjuntos, cuyos objetos sean conjuntos variables, y que existan propiedades tan naturales como que la verdad se conserve a través del tiempo, entre otras. Con esto en mente entramos a construir dicha estructura.

2.2. Construcción y propiedades elementales

Definición 2.1. *Dado $\langle \mathbb{P}; \leq \rangle$, un conjunto parcialmente ordenado, definimos por recursión para $p \in \mathbb{P}$:*

$$V_0(p) = \emptyset$$

$$V_\lambda(p) = \bigcup_{\alpha \leq \lambda} V_\alpha(p) \text{ si } \lambda \text{ es un ordinal limite.}$$

$$V_{\alpha+1}(p) = \{f : [p) \to \bigcup_{q \geq p} \mathrm{P}(V_\alpha(q)) : \text{si } p \leq q \to f(q) \subset V_\alpha(q) \text{ y si } p \leq q \leq r \to \forall g \in f(q)(g \restriction_{[r)} \in f(r))\}$$

Definimos entonces "El universo en el instante p", como $V(p) = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha(p)$.

Esta construcción resulta en principio diferente a la construcción de la jerarquía cumulativa sobre un espacio topológico que vimos en el capitulo anterior; veremos que esta resulta ser isomorfa al haz de gérmenes del prehaz exacto definido en el capitulo anterior. Así, en este caso en particular tendremos la ventaja de trabajar en algún sentido directamente con el haz de gérmenes. Notaremos como $V^{\mathbb{P}}$ a la construcción de la jerarquía cumulativa de los conjuntos variables sobre $\mathbb{P}$ con la topología de sus subconjuntos hereditarios. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Dado $\mathbb{P}$ un orden parcial arbitrario*

$$\mathfrak{A}_{V^{\mathbb{P}}} \cong V$$

Demostración. Defina

$$\Theta : E^* \to E$$

$$\Theta([f]_q) = \tilde{f}_q$$

donde

$$\tilde{f}_q : [q) \to \bigcup_{r \geq t} V(r)$$

$$\tilde{f}_q(r) = \{\tilde{g}_r \in V(r) : g \in [f]_r\}$$

y

$$[f]_q = \{g \in V^{\mathbb{P}}([q)) : g \restriction_{Ab([q))} = f \restriction_{Ab([q))}\}$$

Note que $\tilde{f}_q \in V(q)$ ya que de la definición es claro que $f_q(r) \subseteq V(r)$ y por otro lado dados $s \geq r \geq q$, si $h \in f_q(r)$ entonces $h = \tilde{g}$ para algún $g \in [f]_r$, entonces $g \in V([r))$ y $g \restriction_{Ab([r))} = f \restriction_{Ab([r))}$. De la primera condición entonces $g \restriction_{Ab([s))} \in V([s))$, y de la segunda $g \restriction_{Ab([s))} = f \restriction_{Ab[s)}$ ya que $Ab([s)) \subseteq Ab([r))$. □

Consideremos las funciones t_{pq} donde $p, q \in \mathbb{P}$ y $p \leq q$, definidas de la siguiente manera: $t_{pq}f = f \restriction_{[q)}$, es claro que $t_{pp} = id_{V(p)}$ y que si $r \geq q \geq p$ $t_{pr} = t_{qr} \circ t_{pq}$ ya que $t_{qr} \circ t_{pq}(f) = t_{qr}(f \restriction_{[q)}) = (f \restriction_{[q)}) \restriction_{[r)} = f \restriction_{[r)} = t_{pr}(f)$. Por lo tanto podemos ver a

$$\mathbb{V} = \langle \mathbb{P}, \leq, \{V(p)\}_{p \in \mathbb{P}}, \{t_{pq}\}_{(p,q) \in \leq} \rangle$$

como un modelo de Kripke sobre el orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$.

Nuestro siguiente paso es definir la pertenencia sobre nuestros modelos $V(p)$, de la manera más natural definimos:

$\Vdash_p a \in f$ (en el nodo p se fuerza a pertenece a f) si y sólo si $a \in f(p)$ en el sentido clásico de pertenencia.

Ya definida la pertenencia lo primero que hemos de notar, es que si el orden parcial $\mathbb{P}$ es no trivial, es decir tiene por lo menos dos elementos comparables, el universo $V(p)$ no va ser isomorfo a nuestro universo clásico de la teoría de conjuntos V. Este es el contenido del siguiente lema.

Lema 2.1. *Dado $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial, si existen $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \neq q$ y comparables entonces $V(p)$ bajo la pertenencia anteriormente definida no es isomorfo al universo clásico de la teoría de conjuntos V.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ con $p \neq q$ y $p \leq q$. $V_0(p) = \emptyset = V_0(q)$. Ahora $V_1(p) = \{f : [p) \to \bigcup_{q \geq p}\{\emptyset\}\} = \{f : [p) \to \{\emptyset\} : f(s) = \emptyset \text{ para todo } s\}$. Note que $V_1(p)$ al igual que en el modelo clásico tiene un solo elemento, pero en nuestro siguiente paso es decir $V_2(p)$ tenemos

$$V_2(p) = \{V_0 \restriction_{[p)}, V_1 \restriction_{[p)}, \{(p, \emptyset), (q, \{f\}), ...\}...\}$$

donde f es el único elemento de $V_1(p)$. Así vemos que $V_2(p)$ tiene por lo menos 3 elementos , mientras V_2 tiene solo 2. □

Por otro lado si el orden es trivial es decir $\mathbb{P} = \{p\}$ y $\leq = \{(p, p)\}$, tenemos que nuestra construcción en este caso si resulta isomorfa de manera natural a V, nuestro modelo clásico. Mas precisamente podemos definir

$$\psi : V(p) \to V_{clásico}$$

un isomorfismo, de la siguiente manera,

$$\psi(V_0) = \emptyset$$
$$\psi(g) = \{\psi(h) : h \in g(p)\}$$

de la definición es claro que $\Vdash_p f \in g$ ssi $f \in g(p)$ ssi $\psi(f) \in \psi(g)$, tenemos entonces que ψ es un morfismo falta mostrar entonces que es 1-1 y sobre. Antes de mostrar esto será necesario lo siguiente.

Definición 2.2. *Para $p \in \mathbb{P}$ y $f \in V(p)$ definimos*

$$ran_p(f) = min\{\alpha \in On : f \in V_{\alpha+1}(p)\}$$

el rango de f en p.

Lema 2.2. *Si $\Vdash_p x \in f$ entonces $ran_p(x) < ran_p(f)$*

Demostración. Si tenemos $\Vdash_p x \in f$ entonces $x \in f(p)$. Sea $\alpha = ran_p(f)$, entonces $f \in V_{\alpha+1}(p)$, por lo tanto tenemos $f(p) \subset V_\alpha(p)$. De esta manera $x \in V_\alpha(p)$, por lo cual $ran_p(x) \leq \alpha$. □

Veremos ahora por inducción en ran_p que ψ es inyectiva. Nuestra hipótesis de inducción dado α será: dados x y y en $V(p)$, con rango (en el sentido anteriormente definido) menor estricto que α, si $x \neq y$ entonces $\psi(x) \neq \psi(y)$. Si $\alpha = 0$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que tenemos el resultado para $\alpha > 0$ arbitrario. Sean $f, g \in V(p)$, con rango menor o igual a α, si $\psi(f) = \psi(g)$ entonces $\{\psi(h) : h \in f\} = \{\psi(m) : m \in g\}$, por lo tanto dado $h \in f$ existe $m \in g$, para el cual $\psi(h) = \psi(m)$, pero como tanto el rango de h como el de m , es menor que α,(por el lema anterior) tenemos por hipótesis de inducción que $h = m$, concluyendo así que $f = g$.
Para mostrar la sobreyectividad, dado B un conjunto arbitrario definimos

$$\widehat{B} : [p) = \{p\} \to \bigcup_{q \geq p} V(q) = V(p)$$

$$\widehat{B}(p) = \{\widehat{a} : a \in B\}$$

en particular tenemos $\widehat{\emptyset}(p) = \emptyset$. Veremos por inducción en el rango de B que $\psi(\widehat{B}) = B$. Si rango de B es cero entonces $B = \emptyset$ y como ya vimos para este se cumple. Ahora dado B con rango $\alpha > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\psi(\widehat{B}) &= \{\psi(h) : h \in \widehat{B}(p)\} \\
&= \{\psi(h) : h \in \{\widehat{b} : b \in B\}\} \\
&= \{\psi(\widehat{b}) : b \in B\} \\
&= \{b : b \in B\} = B (\text{por hipótesis de inducción})
\end{aligned}$$

Note que igualmente si p es un nodo maximal siguiendo la demostración anterior podemos mostrar que $V(p)$ es isomorfo a V, ya que la construcción no se afecta debido a la inexistencia de nodos posteriores.
Es importante observar aunque sea evidente, que el rango no crece con respecto al orden, es decir si $p < q$ entonces $ran_p(f) \geq ran_q(f \restriction_{[q)})$, ya que por definición si $f \in V_\alpha(p)$ entonces $f \restriction_{[q)} \in V_\alpha(q)$, pues bien, V_α cumple la segunda condición en la definición de la jerarquía, mas aún tenemos que $V_\alpha \restriction_{[p)} \in V_{\alpha+1}(p)$.

Lema 2.3. *Dado $p \in \mathbb{P}$*

$$V_0(p) \subset V_1(p) \subset V_2(p) \subset ... \subset V_\beta(p) \subset V_{\beta+1}(p) \subset ...$$

Demostración. Por inducción en α veremos que $V_\alpha(p) \subset V_{\alpha+1}(p)$:
1. Si $\alpha = 0$ es claro.
2. Si α es un ordinal limite y $f \in V_\alpha(p) = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta(p)$; entonces $imagen(f) \subset \bigcup_{q\geq p} P(V_\beta(q))$ para algún $\beta < \alpha$ y $V_\beta(q) \subset \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma(q) = V_\alpha(q)$. Por lo tanto $imagen(f) \subset \bigcup_{q\geq p} P(V_\alpha(q))$, de aquí se desprende que $f(q) \subset V_\alpha(q)$. La segunda condición de la definición se tiene debido a que $f \in V_\xi(p)$ para algún $\xi < \alpha$ y por hipótesis de inducción, $f \in V_{\xi+1}(p)$. Concluimos entonces que $f \in V_{\alpha+1}(p)$.
3. Si $\alpha = \gamma + 1$ y $f \in V_\alpha(p)$, entonces $imagen(f) \subset \bigcup_{q\geq p} P(V_\gamma(q))$. Por hipótesis de inducción $V_\gamma(q) \subset V_{\gamma+1}(q) = V_\alpha(q)$, para todo $q \geq p$, por lo tanto $\bigcup_{q\geq p} P(V_\gamma(q)) \subset \bigcup_{q\geq p} P(V_\alpha(q))$, así, $imagen(f) \subset \bigcup_{q\geq p} P(V_\alpha(q))$. Podemos entonces concluir como en el caso anterior que $f \in V_{\alpha+1}(p)$. □

2.3. Inmersión de V en $V(p)$

Aunque en general dado un orden parcial $\mathbb{P}$ no trivial, vimos que $V(p)$ y V no son isomorfos, existe una manera canónica de sumergir a V en $V(p)$. A saber: dado un conjunto arbitrario, a, definimos

$$\widehat{a}(p) : [p) \to \bigcup_{q\geq p} V(q)$$

$$\widehat{a}(p)(q) = \{\widehat{b}(p) \restriction_{[q)} : b \in a\}$$

Lema 2.4. *Dado a un conjunto arbitrario, $p \in \mathbb{P}$ y $q \geq p$*

$$\widehat{a}(p) \restriction_{[q)} = \widehat{a}(q)$$

Demostración. Por inducción en el rango de la jerarquía clásica:
i. Si $ran(a) = 0$ entonces $a = \emptyset$, por lo tanto

$$\widehat{\emptyset}(p)(r) = \emptyset$$

para todo $r \geq q \geq p$, y

$$\widehat{\emptyset}(q)(r) = \emptyset = \widehat{\emptyset}(p) \restriction_{[q)} (r)$$

ii. Dado $\alpha > 0$ suponga que tenemos el resultado para todo conjunto, con rango menor que α. Sea a, un conjunto tal que $ran(a) = \alpha$. Entonces dado $r \geq q \geq p$

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(p) \restriction_{[q)} (r) &= \{\widehat{b}(p) \restriction_{[r)} : b \in a\} \\
&= \{\widehat{b}(r) : b \in a\} \text{ (Por hipótesis de inducción)} \\
&= \{\widehat{b}(q) \restriction_{[r)} : b \in a\} \text{ (Por hipótesis de inducción)} \\
&= \widehat{a}(q)(r)
\end{aligned}$$

□

Podemos entonces redefinir

$$\widehat{a}(p)(q) = \{\widehat{b}(q) : b \in a\}$$

Lema 2.5. *Dados a y b conjuntos arbitrarios y $p \in \mathbb{P}$:*
1. Si $a \neq b$ si y sólo si $\widehat{a}(p) \neq \widehat{b}(p)$.
2. $b \in a$ si y solo si $\widehat{b}(p) \in \widehat{a}(p)(p)$.
3.$\widehat{a}(p) \in V(p)$

Demostración. 1. Por inducción en el rango:
i. Si $ran(a) = 0 = ran(b)$ y $\widehat{a}(p) = \widehat{\emptyset}(p) = \widehat{b}(p)$, claramente, $a = b$.
ii. Nuestra hipótesis de inducción dado $\alpha > 0$ sera: si a y b, tienen rango menor que α y $a \neq b$ entonces para todo $p \in \mathbb{P}$, $\widehat{a}(p) \neq \widehat{b}(p)$. Sean c y d conjuntos arbitrarios con rango menor o igual a α. Si

$$\widehat{c}(p)(q) = \{\widehat{x}(q) : x \in c\} = \{\widehat{y}(q) : y \in d\} = \widehat{d}(p)(q)$$

para todo $q \geq p$, entonces dado $x \in c$, $\widehat{x}(q) \in \widehat{c}(p)(q)$, y para este existe, $y \in d$ tal que $\widehat{y}(q) \in \widehat{d}(p)(q)$ y $\widehat{x}(q) = \widehat{y}(q)$ pero por hipótesis de inducción esto implica que $x = y$. De igual manera tomando $y \in d$ arbitrario podemos encontrar $x \in c$ tal que $y = x$, por lo tanto $c = d$.
2. Si $a \in b$ por definición $\widehat{a}(p) \in \widehat{b}(p)(p)$. Para la otra dirección si $\widehat{a}(p) \in \widehat{b}(p)(p) = \{\widehat{c}(p) : c \in b\}$ entonces $\widehat{a}(p) = \widehat{c}(p)$ para algún $c \in b$, pero por la parte 1 esto implica $a = c$, por lo tanto $a \in b$.
3. Por inducción en el rango de la jerarquía clásica: i. Si Rango de a es igual a cero, entonces $a = \emptyset$ y

$$\widehat{\emptyset}(p) : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\widehat{\emptyset}(p)(q) = \emptyset$$

de donde concluimos $\widehat{\emptyset}(p) \in V_1(p)$.
ii. Sea $\alpha > 0$ y supongamos que para todo conjunto b con rango menor que α, $\widehat{b}(p) \in V(p)$. Sea, a tal que $ran(a) = \alpha$, entonces

$$\widehat{a}(p) : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\widehat{a}(p)(q) = \{\widehat{b}(p) \restriction_{[q)} : b \in a\}$$

es claro que $\widehat{a}(p)(q) \subset V(q)$ ya que dado $b \in a$ como $ran(b) < ran(a)$, por hipótesis de inducción $\widehat{b}(p) \in V(p)$ y por lo tanto $\widehat{b}(p) \restriction_{[q)} \in V(q)$. Por otro lado dado $r \geq q \geq p$ y $g \in \widehat{a}(p)(q)$, tenemos que $g = \widehat{b}(q)$, para algún $b \in a$; de esta manera es claro que $\widehat{b}(q) \restriction_{[r)} = \widehat{b}(r) \in \widehat{a}(p)(r)$. Concluimos así que $\widehat{a}(p)$ cumple las dos condiciones en la definición de la jerarquía, por lo cual $\widehat{a}(p) \in V(p)$. $\square$

De lo anterior vemos que si definimos

$$\Psi : V \to V_(p)$$

$$\Psi(a) = \widehat{a}(p)$$

este es un monomorfismo entre estas dos clases.

Capítulo 3

ZFC en $\mathbb{V}$

En este capitulo veremos que los axiomas de Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección son forzados en $\mathbb{V}$. La mayoría de los axiomas serán forzados en su forma plena tal como los conocemos, sin embargo tanto el axioma de elección como el de fundamentación serán forzados en versiones intuicionisticamente más débiles pero clásicamente equivalentes a las versiones que conocemos de cada uno.

3.1. Introducción

La tarea que llevaremos a cabo será de suma importancia en nuestro objetivo de lograr una aproximación más natural a las pruebas de independencia del forcing clásico, si bien el lograr forzar los axiomas de ZFC en nuestro modelo $\mathbb{V}$ sobre un orden parcial arbitrario, nos abre una amplia gama de posibilidades para la construcción de modelos clásicos via un filtro genérico. Veremos más adelante que una cuidadosa elección de el orden parcial sobre el cual trabajamos nos guiará hacia uno de los resultados mas importantes del forcing clásico, la independencia de la hipótesis del continuo. En lo que presentamos a continuación se hará evidente el comportamiento del modelo $\mathbb{V}$ y se realizaran algunas de las construcciones fundamentales de la teoría de conjuntos, como los productos cartesianos, las funciones, los conjuntos potencia entre otras.

3.2. ZF$^-$

3.2.1. El axioma de existencia.

Existe un conjunto que no tiene elementos

Queremos mostrar entonces que dado $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p \exists x \forall y (y \notin x)$$

el testigo de este existencial sera simplemente $\widehat{\emptyset}(p)$, ya que para todo $q \geq p$ y $f \in V(q)$, si $r \geq q$, $\nVdash_r f \in \widehat{\emptyset}(r)$, pues $\widehat{\emptyset}(r)(r) = \emptyset$.

Teorema 3.1. *Dado $p \in \mathbb{P}$*

$$\Vdash_p \exists x \forall y (y \notin x)$$

3.2.2. El axioma de extensionalidad.

Si todo elemento de x es un elemento de y y todo elemento de y es un elemento de x, entonces $x = y$

Queremos forzar entonces para $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

esto equivale a mostrar por definición que dado $q \geq p$, y $x, y, z \in V(q)$ arbitrarios, si $r \geq q$ y $z \in f(r)$ si y sólo si $z \in g(r)$ entonces $f = g$. Supongamos entonces que dado $r \geq q$, $z \in f(r)$ si y sólo si $z \in g(r)$, entonces por extensionalidad en el modelo externo, $f(r) = g(r)$ para todo $r \geq q \geq p$, por lo cual $f = g$.

Teorema 3.2.

$$\Vdash_p \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

3.2.3. El axioma esquema de comprensión.

Sea φ una formula con variables libres entre $x, z, w_1, ..., w_n$. Para todo conjunto z, existe un conjunto y tal que, $x \in y$ si y sólo si $x \in z$ y $\varphi(x)$ vale para x.

Así para cada nodo $p \in \mathbb{P}$ veremos

$$\Vdash_p \forall z \forall w_1, ..., w_n \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi)$$

Consideremos entonces $q \geq p$ y $z, w_1, ..., w_n \in V(q)$ arbitrarios, queremos hallar, $y \in V(q)$ tal que para todo $r \geq q$ y x arbitrario en $V(r)$, dado $t \geq r$, $x \in y(t)$ si y sólo si $x \in z(t)$ y $\Vdash_t \varphi$. Una manera mas sencilla y equivalente, es mostrar que para todo $z, w_1, ..., w_n \in V(p)$, existe $y \in V(p)$ tal que dado $q \geq p$ y $x \in V(q)$ arbitrario, $x \in y(q)$ si y sólo si $x \in z(q)$ y $\Vdash_q \varphi$. Definamos entonces el testigo de este existencial. Sea

$$y : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$y(q) = \{x \in z(q) : \Vdash_q \varphi\}$$

Note que efectivamente $y(q)$ existe como conjunto en el modelo externo en el que estamos trabajando, por el propio axioma de comprensión en este modelo, ya que $\Vdash_q \varphi$ es simplemente una formula con variables libres $x, z, w_1, ..., w_n, q_1, ..., q_n$, donde los q_i son las variables que interpretan los nodos del orden.

Lema 3.1. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $y \in V(p)$*

Demostración. Sea $\alpha = ran_p(z)$ entonces $z \in V_{\alpha+1}(p)$. Como $y(q) \subset z(q)$ por definición, para todo $q \geq p$, entonces $y(q) \subset V_\alpha(q)$, por lo tanto

$$y : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} P(V_\alpha(q))$$

Consideremos ahora $r \geq q \geq p$ y $g \in y(q)$, entonces $g \in z(q)$ y $\Vdash_q \varphi(g)$, por lo cual $g \restriction_{[r)} \in z(r)$ y $\Vdash_{[r)} \varphi(g \restriction_{[r)})$, concluimos entonces que $g \restriction_{[r)} \in y(r)$. ☐

Teorema 3.3. *Dado $p \in \mathbb{P}$ y φ una formula con variables libres $x, z, w_1, ..., w_n$,*

$$\Vdash_p \forall z \forall w_1, ..., w_n \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \land \varphi)$$

3.2.4. El axioma de pares.

Dados x y y arbitrarios, existe z, tal que $w \in z$ si y sólo si $w = x$ o $w = y$.

Dado $p \in \mathbb{P}$ verificaremos

$$\Vdash_p \forall x \forall y \exists z (\forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \lor w = y)$$

Dado entonces $q \geq p$ y $x, y \in V(q)$ arbitrarios sea

$$z : [q) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$z(r) = \{x \restriction_{[r)}, y \restriction_{[r)}\}$$

es claro entonces que z es quien buscamos, pues bien dado $r \geq q$ y $w \in V(r)$, $w \in z(r)$ implica $w = x \restriction_{[r)}$ o $w = y \restriction_{[r)}$ por lo tanto tenemos que $\Vdash_r \forall w (w \in z \rightarrow (w = x \lor w = y))$, la otra dirección es clara . Basta mostrar entonces que:

Lema 3.2. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $z \in V(p)$*

Demostración. Es claro que $z(q) \subset V(q)$ para todo $q \geq p$, por otro lado dados $r \geq q \geq p$, si $w \in z(q)$ entonces $w = x \restriction_{[q]}$ o $w = y \restriction_{[q]}$. Si $w = x \restriction_{[q]}$, entonces $w \restriction_{[r]} = (x \restriction_{[q]}) \restriction_{[r]} = x \restriction_{[r]} \in z(r)$. □

Teorema 3.4. *Dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p \forall x \forall y \exists z(\forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

3.2.5. El axioma de union.

Para cualquier $\mathcal{F}$, existe A tal que $x \in A$ si y sólo si $x \in Y$ para algún $Y \in \mathcal{F}$.

Veremos entonces para $p \in \mathbb{P}$,

$$\Vdash_p \forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$$

Sea $q \geq p$ y $\mathcal{F} \in V(q)$, definamos

$$A : [q] \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$A(q) = \bigcup \{Y(q) : Y \in \mathcal{F}(q)\}$$

note entonces que dado $r \geq q$ y $Y, x \in V(r)$ arbitrarios, si $\Vdash_r x \in Y$ y $\Vdash_r Y \in \mathcal{F}$, entonces $x \in Y(r)$ y $Y \in \mathcal{F}(r)$, entonces $x \in \bigcup \{W(r) : W \in \mathcal{F}(r)\} = A(r)$, por lo cual $\Vdash_r x \in A$ como buscábamos.

Lema 3.3. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $A \in V(p)$*

Demostración. Sea $\alpha = ran_p(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F} \in V_{\alpha+1}(p)$, así dado $q \geq p$, $\mathcal{F}(q) \subset V_\alpha(q)$, por lo cual $A(q) = \bigcup \{Y(q) : Y \in \mathcal{F}(q)\} \subset V_\alpha(q)$. Ahora dado $r \geq q \geq p$, si $h \in A(q)$, entonces existe $Y \in \mathcal{F}(q)$ tal que $h \in Y(q)$, como $\mathcal{F} \in V(p)$, $Y \restriction_{[r]} \in \mathcal{F}(r)$ y como $Y \in V(q)$, $h \restriction_{[r]} \in Y(r)$, entonces $h \restriction_{[r]} \in A(r)$. □

Teorema 3.5. *Dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p \forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$$

3.2.6. El axioma del conjunto potencia.

Para todo conjunto x, existe y, tal que $z \in y$ si y sólo si $z \subseteq x$

Dado entonces $f \in V(p)$, el conjunto g que queremos que sea forzado como $P(f)$ en $V(p)$ debe cumplir

$$\Vdash_p x \in g \leftrightarrow \forall y(y \in x \rightarrow y \in f)$$

o lo que es equivalente que dado $q \geq p$, $\Vdash_q x \in g$ si y sólo si $\Vdash_q \forall y(y \in x \rightarrow y \in f)$, es decir que dado $q \geq p$, $x \in g(q)$ si y sólo si para todo $r \geq q$ y $y \in V(r)$, dado $t \geq r$, $y \in x(t)$ implica $y \in f(t)$.Es natural entonces definir

$$g : [p] \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$g(q) = \{h : [q] \rightarrow \bigcup_{r \geq q} P(f(r)) : 1.\text{Dado } r \geq q, h(r) \subset f(r), \quad 2.\text{Dado } t \geq r \geq q, \text{ para todo } i \in h(r), i \restriction_{[t]} \in h(t)\}$$

Lema 3.4. *Dado $p \in \mathbb{P}$ y $f \in V(p)$, si $ran_p(f) = \alpha$*

$$\Vdash_p g = P(f) \in V_{\alpha+2}$$

es decir que el objeto que se fuerza como $P(f)$ esta en $V(p)$.

Demostración. Note que para $q \geq p$, $g(q) \subset V_{\alpha+1}(q)$, por definición y por el hecho de que $f \in V_{\alpha+1}(p)$, ya que esto implica que $f(r) \subset V_{\alpha+1}(r)$, es decir $P(f(r)) \subset P(V_{\alpha+1}(r)$, para $r \geq q$. Ahora dado $r \geq q \geq p$, si $h \in g(q)$, entonces

$$h \restriction_{[r)} : [r) \to \bigcup_{t \geq r} V(t)$$

y claramente hereda la otras dos propiedades, por lo tanto $h \restriction_{[r)} \in g(r)$. $\square$

Otra observación importante que hacer es que al igual que en la jerarquía clásica se verifica

$$\Vdash_p P(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$$

Teorema 3.6. *Dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$$

3.2.7. El axioma de infinito

Existe un conjunto inductivo

Mostrar que este axioma se fuerza, exigirá un poco mas de trabajo, pues bien toca determinar que significa inductivo en nuestro modelo $V(p)$, para tal fin lo primero que debemos hacer, sera definir el operador "sucesor"en $V(p)$. Dado $f \in V(p)$ definimos entonces,

$$Suc(f) : [p) \longrightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$Suc(f)(q) = \{f \restriction_{[q)}\} \cup f(q)$$

Lema 3.5. *Dado $f \in V(p)$, $Suc(f) \in V(p)$*

Demostración. Dado $q \geq p$, $Suc(f)(q) = \{f \restriction_{[q)}\} \cup f(q) \subset V(q)$, pues bien como $f \in V(p)$ entonces $f \restriction_{[q)} \in V(q)$ y $f(q) \subset V(q)$. Por otro lado dado $r \geq q \geq t$, si $h \in Suc(f)(q)$ entonces $h = f \restriction_{[q)}$ o $h \in f(q)$, en el primer caso $h \restriction_{[r)} = (f \restriction_{[q)}) \restriction_{[r)} = f \restriction_{[r)} \in Suc(f)(r)$, para el segundo caso $h \restriction_{[r)} \in f(r) \subset Suc(f)(r)$. $\square$

Lema 3.6. $\Vdash_p x \in Suc(f) \leftrightarrow x = f \vee x \in f$

Demostración. Tenemos que mostrar que dado $q \geq p$ tenemos que $\Vdash_q x \in suc(f)$ si y sólo si $\Vdash_q x = f \vee x \in f$. Si tenemos que $\Vdash_q x \in suc(f)$ entonces tenemos que $x \in Suc(f)(q)$ es decir que $x \in \{f \restriction_{[q)}\} \cup f(q)$ entonces $x = f \restriction_{[q)}$ o $x \in f(q)$ concluimos entonces que $\Vdash_q x = f \vee x \in f$, la otra dirección es clara. $\square$

Recordemos que quien se fuerza como el conjunto vacío en $V(p)$, es $\widehat{\emptyset}(p)$, con esto en mente un elemento $f \in V(p)$ es inductivo si

$$\Vdash_p \widehat{\emptyset}(p) \in f \wedge (\forall x (x \in f \to Suc(x) \in f))$$

Lema 3.7 ("$\widehat{\omega}(p)$ es inductivo").

$$\Vdash_p (\widehat{\emptyset}(p) \in \widehat{\omega}(p)) \wedge (\forall x (x \in \widehat{\omega}(p) \to Suc(x) \in \widehat{\omega}(p)))$$

Demostración. Queremos mostrar 1.$\Vdash_p \widehat{\emptyset}(p) \in \widehat{\omega}(p)$ y 2.$\Vdash_p \forall x (x \in \widehat{\omega}(p) \to Suc(x) \in \widehat{\omega}(p))$
1. Como $0 \in \omega$ y $\widehat{0}(p) = \widehat{\emptyset}(p) \in \widehat{\omega}(p)(p)$ entonces claramente $\Vdash_p \widehat{\emptyset}(p) \in \widehat{\omega}(p)$.
2. Sea $q \geq p$ y $x \in V(q)$ queremos ver que $\Vdash_q x \in \widehat{\omega}(q) \to Suc(x) \in \widehat{\omega}(q)$ es decir que dado $t \geq q$ se quiere mostrar que si $\Vdash_t x \in \widehat{\omega}(t)$ entonces $\Vdash_t Suc(x) \in \widehat{\omega}(t)$. Si tenemos entonces que $\Vdash_t x \in \widehat{\omega}(t)$ esto quire decir que $f \in \widehat{\omega}(t)(t) = \{\widehat{n}(t) : n \in \omega\}$, por lo tanto $x = \widehat{n}(t)$ para algún $n \in \omega$. Ahora bien $Suc(\widehat{n}(t)) : [t) \to \cup_{r \geq t} V(r)$ satisface que:

$$\begin{aligned}
Suc(\widehat{n}(t))(r) &= \{\widehat{n}(r)\} \cup \widehat{n}(t)(r) \\
&= \{\widehat{n}(r)\} \cup \{\widehat{m}(r) : m < n\} \\
&= \{\widehat{a}(r) : a < n+1\} \\
&= \widehat{n+1}(t)(r)
\end{aligned}$$

Y como tenemos que $\Vdash_t \widehat{n+1}(t) \in \widehat{\omega}(t)$ por lo tanto $\Vdash_t Suc(x) \in \widehat{\omega}(t)$. $\square$

Teorema 3.7. *Dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p \exists x(\widehat{\emptyset}(p) \in x \wedge (\forall y(y \in x \rightarrow Suc(y) \in x))$$

3.2.8. El axioma esquema de reemplazo.

Sea φ una formula con variables libres $x, y, A, w_1, ..., w_n$, tal que para todo x existe un único y, para el cual $\varphi(x, y)$ vale. Para todo conjunto A existe un conjunto Y tal que para todo $x \in A$ existe $y \in Y$ para el cual $\varphi(x, y)$ vale.

Debemos mostrar entonces, para $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p \forall A \forall w_1, ..., w_n(\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y...) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \quad \varphi(x, y, ...))$$

Es decir que dado $q \geq p$ y $A, w_1, ..., w_n, x \in V(q)$ arbitrarios, queremos ver que para todo $r \geq q$, dado $s \geq r$, si $x \in A(s)$ y existe $y \in V(s)$ tal que para todo $t \geq s$ y $k \in V(t)$, $\Vdash_t \varphi(x, k) \rightarrow k = y$, entonces, existe $Y \in V(r)$ tal que dado $s \geq r$ y $x \in A(s)$, existe $y \in Y(s)$ para el cual $\Vdash_s \varphi(x, y)$. Definamos

$$Y : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$Y(q) = \{y : \text{ existe } x \in A(q) \text{ tal que } \Vdash_q \varphi(x, y, ...)\}$$

Igual que antes $Y(q)$ existe debido al axioma de reemplazo en el modelo de la teoría de conjuntos en el que estamos trabajando, y es claro que satisface lo que queremos. Basta mostrar entonces:

Lema 3.8. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $Y \in V(p)$*

Demostración. Si $k \in Y(q)$, entonces existe $x \in A(q)$ para el cual $\Vdash_q \varphi(x, y, ...)$ vale. Pero sabemos que para este x existe $y \in V(q)$, tal que $\Vdash_q \varphi(x, y, ...)$ vale, y además que es único, por lo tanto $k = y$, entonces $Y(q) \subset V(q)$. Por otro lado dado $r \geq q \geq p$, si $g \in Y(q) = \{y : \text{existe } x \in A(q) \text{ tal que } \Vdash_q \varphi(x, y, ...)\}$, sea $x \in A(q)$ tal que $\Vdash_q \varphi(x, g, ...)$ entonces $\Vdash_r \varphi(x \restriction_{[r)}, g \restriction_{[r)}, ...)$ y como $x \restriction_{[r)} \in A(r)$ ya que $A \in V(q)$, concluimos que $g \restriction_{[r)} \in \{y : \text{existe } x \in A(r) \text{ tal que } \Vdash_r \varphi(x, y, ...)\} = Y(r)$ □

3.3. Funciones en V(p)

Abrimos un paréntesis antes de mostrar que el axioma de fundamentación y el axioma de elección son forzados, para hacer una construcción que será fundamental de aquí en adelante. Veremos que clase de objetos son aquellos que se fuerzan como funciones entre objetos de $V(p)$. Para tal fin sera necesario construir los objetos que se fuerzan como parejas ordenadas, y como producto cartesiano de objetos en $V(p)$.

Comenzamos viendo, dados f y g en $V(p)$ que objeto va a ser la tupla ordenada (f, g), en $V(p)$. En nuestro modelo clásico sabemos que si $x \in (a, b)$ entonces $x = \{a\}$ o $x = \{a, b\}$. De esta manera si definimos:

$$h : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(p)$$

$$h(q) = \{\{f\} \restriction_{[q)}, \{f, g\} \restriction_{[q)}\}$$

h sera el objeto que de manera natural va a ser forzado como la tupla (f, g) en $V(p)$. Antes de mostrar esto recordemos aquí que son $\{f\} \restriction_{[q)}$ y $\{f, g\} \restriction_{[q)}$.

$$\{f\} \restriction_{[q)} : [q) \rightarrow \bigcup_{t \geq q} V(t)$$

$$\{f\} \restriction_{[q)} (t) = \{f \restriction_{[t)}\}$$

$$\{f, g\} \restriction_{[q)} : [q) \rightarrow \bigcup_{t \geq q} V(t)$$

$$\{f,g\}\restriction_{[q]}(t) = \{f\restriction_{[t]}, g\restriction_{[t]}\}$$

Ahora si podemos mostrar:

Lema 3.9. $\Vdash_p \forall x(x \in h \leftrightarrow (x = \{f\} \vee x = \{f,g\}))$

Demostración. Toca mostrar que dado $q \geq p$ y x arbitrario en $V(q)$, $\Vdash_q x \in h \leftrightarrow (x = \{f\} \vee x = \{f,g\})$ es decir que dado $t \geq q$ si $\Vdash_t x \in h$ si y sólo si $\Vdash_t x = \{f\} \vee x = \{f,g\}$. Entonces $\Vdash_t x \in h$ si y sólo si $x \in h(t) = \{\{f\}\restriction_{[t]}, \{f,g\}\restriction_{[t]}\}$ si y sólo si $x = \{f\}\restriction_{[t]}$ o $x = \{f,g\}\restriction_{[t]}$ si y sólo si $\Vdash_t x = \{f\} \vee x = \{f,g\}$. □

Tenemos un resultado inmediato de suma importancia.

Lema 3.10. *Dados a, b dos conjuntos arbitrarios*

$$\Vdash_p \widehat{(a,b)}(p) = (\widehat{a}(p), \widehat{b}(p))$$

Demostración.

$$\widehat{(a,b)}(p) : [p] \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\widehat{(a,b)}(p)(q) = \{\widehat{\{a\}}(q), \widehat{\{a,b\}}(q)\}$$

Por otro lado

$$(\widehat{a}(p), \widehat{b}(p))(q) = \{\{\widehat{a}(p)\}\restriction_{[q]}, \{\widehat{a}(p), \widehat{b}(p)\}\restriction_{[q]}\}$$

basta mostrar entonces : 1.$\widehat{\{a\}}(q) = \{\widehat{a}(p)\}\restriction_{[q]}$ y que 2.$\widehat{\{a,b\}}(q) = \{\widehat{a}(p), \widehat{b}(p)\}\restriction_{[q]}$.
Es claro que el dominio y el codominio de estas cuatro funciones coinciden. Ahora:
1.$\widehat{\{a\}}(q)(r) = \{\widehat{a}(r)\} = \{\widehat{a}(p)\restriction_{[r]}\} = \{\widehat{a}(p)\}\restriction_{[q]}(r)$.
2.$\widehat{\{a.b\}}(q)(r) = \{\widehat{a}(r), \widehat{b}(r)\} = \{\widehat{a}(p)\restriction_{[r]}, \widehat{b}(p)\restriction_{[r]}\} = \{\widehat{a}(p), \widehat{b}(p)\}\restriction_{[q]}(r)$. □

Una observación sobre la notación, para evitar agregar un nuevo símbolo que represente el objeto que se fuerza como la tupla (f,g) en $V(p)$ para $f, g \in V(p)$, usaremos la notación clásica y observaremos cuando se este hablando del uno o del otro. Haremos esto también para objetos como $\{f\}$, $\{f,g\}$, $P(f)$, entre otros, esperamos que sea claro para el lector del contexto cuando se esta hablando del objeto que es forzado como tal o cuando nos estamos refiriendo al objeto clásico.

Ahora dados dos elementos f y g en $V(p)$ queremos ver quien se fuerza como $f \times g$ en $V(p)$. De manera natural podemos ver que:

$$F : [p] \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

tal que

$$F(q) = \{(a,b)\restriction_{[q]} : a \in f(q) \wedge b \in g(q)\}$$

es quien se fuerza como $f \times g$

Lema 3.11.

$$\Vdash_p \forall x(x \in F \to \exists a \exists b(a \in f \wedge b \in g \wedge x = (a,b)))$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Lema 3.12. *Dados A y B dos conjuntos arbitrarios:*

$$\Vdash_p \widehat{A}(p) \times \widehat{B}(p) = (\widehat{A \times B})(p)$$

Demostración.

$$(\widehat{A}(p) \times \widehat{B}(p))(q) = \{(a,b) \restriction_{[q]} : a \in \widehat{A}(p)(q) \wedge \widehat{B}(p)(q)\}$$
$$= \{(\widehat{m}(q), \widehat{n}(q)) \restriction_{[q]} : m \in A \wedge n \in B\}$$
$$= \{\widehat{(m,n)}(q) : m \in A \wedge n \in B\} = \widehat{A \times B}(p)(q)$$

□

Corolario 3.1.

$$\Vdash_p \widehat{\omega}(p) \times \widehat{P(\omega)}(p) = (\omega \widehat{\times P(}\omega))(p)$$
$$\Vdash_p \widehat{P(\omega)}(p) \times \widehat{P(P(\omega))}(p) = P(\omega) \widehat{\times P(}P(\omega))(p)$$

□

Dados $A, B \in V(p)$, un objeto f que sea forzado como una función de A en B, debe cumplir

$$\Vdash_p f \subset A \times B \wedge \text{“}f \text{ función”}$$

donde $\Vdash_p f \subset A \times B$, quiere decir

$$\Vdash_p \forall x(x \in f \to x \in A \times B)$$

y $\Vdash_p$ “f función”, significa

$$\Vdash_p \forall x \forall a \forall b(x \in A \to ((\exists y(y \in B \wedge (x,y) \in f)) \wedge ((a \in B \wedge b \in B \wedge (x,a) \in f \wedge (x,b) \in f) \to a = b)))$$

Esto quiere decir que dado $x \in V(p)$ y $q \geq p$, si $x \in f(q)$ entonces $x \in A \times B(q) = \{(a,b) \restriction_{[q]} : a \in A(q) \wedge b \in B(q)\}$, es decir que $\Vdash_q x = (a,b)$, para algún $a \in A(q)$ y $b \in B(q)$. Por otro lado, dados $z, a, b \in V(p)$ arbitrarios y $q \geq p$, si $z \in A(q)$ entonces existe $y \in V(q)$ tal que $y \in B(q)$ y $(z,y) \in f(q)$ (note que en esta ultima parte (z,y) representa al objeto que es forzado como tal tupla), además si $a \in B(q)$ y $b \in B(q)$ y $\Vdash_q (z,a) \in f$ y $\Vdash_q (z,b) \in f$ entonces $a = b$.

Definición 3.1. *Dado $f \in V(p)$ decimos que f es un funcional de A en B para $A, B \in V(p)$ si y sólo si para todo $q \geq p$:*

$$f_q : A(q) \to B(q)$$
$$f_q(a) = b \text{ donde } b \text{ es tal que } \Vdash_q (a,b) \in f$$

es una función.

Por los razonamientos anteriores a la definición tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Dado $p \in \mathbb{P}$, y $A, B, f \in V(p)$,*

$$\Vdash_p \text{“}f \text{ es una función de } A \text{ en } B\text{”}$$

si y sólo si f es un funcional de A en B.

3.4. El Axioma de Fundamentación

Dedicamos una sección al axioma de fundamentación, ya que este a diferencia de los anteriores, no va a ser forzado en la manera que lo conocemos, es decir deberíamos ver para cada nodo $p \in \mathbb{P}$,

$$\Vdash_p \forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))$$

es decir que dados $q \geq p$ y $f \in V(q)$ arbitrarios, deberíamos mostrar para $r \geq q$, que si $f(r) \neq \emptyset$ entonces existe $g \in f(r)$ tal que para todo $t \geq r$, $f(t) \cap g(t) = \emptyset$. Pero es sencillo encontrar un orden $\mathbb{P}$ donde esto no se cumpla, mejor dicho podemos encontrar $\mathbb{P}$ para el cual, existe $q \geq p$ y $f \in V(q)$ tales que existe $r \geq q$, para el cual $f(r) \neq \emptyset$ y para todo $g \in f(r)$ existe $t \geq r$ tal que $f(t) \cap g(t) \neq \emptyset$. Simplemente considere $\mathbb{P} = \{a, b\}$ y $\leq = \{(a,a), (b,b), (a,b)\}$, sean

$$g : \{a, b\} \to V(a)$$

$$g(a) = \{V_0\}$$

$$g(b) = \{V_0 \restriction_{[b)}\}$$

$$f : \{a, b\} \to V(a)$$

$$f(a) = \{g\}$$

$$f(b) = \{g \restriction_{[b)}, V_0 \restriction_{[b)}\}$$

$f, g \in V(a)$ y $\Vdash_a g \in f$, además no vale $\Vdash_a g \cap f = \emptyset$, ya que $\Vdash_b V_0 \restriction_{[b)} \in g \wedge V_0 \restriction_{[b)} \in f$. De esta manera para a y $f \in V(a)$, $f(a) \neq \emptyset$ y para todo $g \in f(a)$, existe $t \geq a$,tome $t = b$, tal que $f(b) \cap g(b) = \{V_0 \restriction_{[b)}\} \neq \emptyset$. Es así que no podemos forzar esta versión de AF, forzaremos una versión intuicionisticamente mas débil, pero clásicamente equivalente, a saber, $\mathrm{AF}^{\mathrm{GK}}$, su traducción de Gödel-Kolmogorov. Antes de ver que efectivamente esta versión de fundamentación se fuerza, recordemos que dada una formula φ si cambiamos cada aparición en φ de una subformula $\forall x \psi(x)$ por $\neg \exists x \neg \psi(x)$ y llamamos φ' la formula resultante, tenemos para todo $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p \varphi^{\mathrm{GK}} \leftrightarrow \varphi'$$

Teorema 3.9. *Dado $p \in \mathbb{P}$*

$$\Vdash_p \ AF^{GK}$$

Demostración. Por el comentario que hicimos antes del teorema, basta mostrar para $p \in \mathbb{P}$,

$$\Vdash_p AF'$$

es decir

$$\Vdash_p \neg \exists x \neg (\exists y (y \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

esto equivale a mostrar que dado $q \geq p$,

$$\nVdash_q \exists x \neg (\exists y (y \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

es decir que para todo $x \in V(q)$,

$$\nVdash_q \neg (\exists y (y \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

debemos entonces mostrar que existe $r \geq q$ para el cual

$$\Vdash_r (\exists y (y \in x) \to \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

Veamos que quiere decir esto: debemos mostrar que existe $r \geq q$ para el cual dado, $t \geq r$, si existe $y \in V(t)$ tal que $\Vdash_t y \in x$ entonces $\Vdash_t \exists z (z \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))$, esta ultima implicación es equivalente a que si existe $y \in x(t)$, entonces existe $y' \in V(t)$, tal que $y' \in x(t)$ y para todo $s \geq t$, $\nVdash \exists z (z \in x \wedge z \in y')$ o lo que es lo mismo $x(s) \cap y'(s) = \emptyset$. En conclusion tenemos que mostrar que para todo $q \geq p$, $x \in V(q)$, existe $r \geq q$ tal que para todo $t \geq r$, $x(t) \neq \emptyset$ implica que existe $y' \in x(t)$ tal que para todo $s \geq t$, $x(s) \cap y(s) = \emptyset$. Supongamos que esto no ocurre, es decir que existe $q \geq p$ y $x \in V(q)$ tales que para todo $r \geq q$ existe $t \geq r$ tal que $x(t) \neq \emptyset$ y tal que para todo $y' \in x(t)$ existe $s \geq t$ para el cual $x(t) \cap y'(s) \neq \emptyset$. Sean q y f testigos de la formula anterior, sea g algún elemento de $f(t)$, sea $s \geq t$ tal que exista $f_1 \in f(s) \cap g(s)$. Como $s \geq r$, $f(s) \neq \emptyset$ y para todo $y \in f(s)$ existe $u \geq t$ tal que $f(u) \cap f_1(u) \neq \emptyset$. Tome u testigo del anterior existencial y $f_2 \in f(u) \cap f_1(u)$. Continuando este proceso obtenemos una cadena infinita

$$f_1 \in f(u)$$

$$f_2 \in f_1(u_1)$$

$$f_3 \in f_2(u_2)$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$f_{n+1} \in f_n(u_n)$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

de donde obtenemos

$$ran(f_1) > ran(f_1(u_1)) > ran(f_2) > .... > ran(f_n(u_n)) > f_{n+1} > ...$$

una cadena infinita descendente de ordinales, en contradicción con fundamentación en el modelo externo. El hecho de que $ran(f) > ran(f(t))$ es claro para cualquier función f, ya que $f(t) \in \{t, f(t)\} \in \{\{t\}, \{t, f(t)\}\} \in f$ □

3.5. El Axioma de Elección

Al igual que con el axioma de fundamentación, no todas las versiones del axioma de elección, clásicamente equivalentes, van a ser forzadas. Esperaríamos que la version más natural la cual nos dice que toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección, fuera forzada, pero veremos que no es así. Para que esta version fuera forzada necesitaríamos, que para cada $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p \forall x(\forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in y)) \rightarrow \exists f(f \text{ función } \wedge \quad dom f = x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow (f(y) \in y))))$$

es decir que

$$(\bullet)\forall q \geq p \forall x \in V(q) \forall r \geq q(\forall s \geq r \forall y \in V(s) \forall t \geq s(y \in x(t) \Rightarrow \exists z(z \in y(t)) \Rightarrow$$

$$(\bullet\bullet)\exists f(\Vdash_r f \text{ función } \wedge dom f = x) \wedge (\forall s \geq r \forall y \in V(s) \forall t \geq s(y \in x(t) \Rightarrow f(y) \in y(t)))$$

pero si consideramos $\mathbb{P} = \{a, b, c, d\}$, $\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, d), (a, c), (c, d)\}$ y

$$x : [a] \rightarrow \bigcup_{q \geq a} V(q)$$

$$x(a) = \emptyset$$

$$x(b) = \{f_1\}$$

$$x(c) = \{f_2\}$$

$$x(d) = \{f\}$$

donde

$$f_1 : [b] \rightarrow \bigcup_{q \geq b} V(q)$$

$$f_1(b) = \{V_0 \restriction_{[b)}\}$$

$$f_1(d) = \{V_0 \restriction_{[d)}, V_1 \restriction_{[d)}\}$$

$$f_2 : [c) \rightarrow \bigcup_{q \geq c} V(q)$$

$$f_2(c) = \{V_1 \restriction_{[c)}\}$$

$$f_2(d) = \{V_0 \restriction_{[d)}, V_1 \restriction_{[d)}\} = f(d)$$

veremos que para x no se cumplirá lo que establece el forzamiento de esta version de elección. Es claro que $x \in V(a)$, es un ejercicio mecánico de verificación. Por otro lado la hipótesis sobre x en $(\bullet)$, se cumple pues bien todos los elementos que aparecen eventualmente en x son no vacíos. Sin embargo no existe un objeto para el cual $(\bullet\bullet)$ sea valido. Si tal objeto existiera, llamándolo g, en cada nodo de $\mathbb{P}$, debería para cada elemento de x en este nodo, escoger un elemento de este elemento. En particular en el nodo b la "función"debería asignarle a f_1 su único elemento $V_0 \upharpoonright_{[b)}$. En el nodo c le asignaría a f_2 su único elemento $V_1 \upharpoonright_{[c)}$. Tendríamos así

$$\Vdash_b (f_1, V_0) \in g$$

$$\Vdash_c (f_2, V_1) \in g$$

por lo cual

$$\Vdash_d (f_1, V_0) \upharpoonright_{[d)} \in g \wedge (f_2, V_1) \upharpoonright_{[d)} \in g$$

pero

$$\Vdash_d (f_1, V_0) \upharpoonright_{[d)} = (f, V_0)$$

ya que

$$(f_1, V_0) \upharpoonright_{[d)} (d) = \{\{f_1\} \upharpoonright_{[d)}, \{f_1, V_0\}\} = \{\{f\} \upharpoonright_{[d)}, \{f, V_0\}\} = (f, V_0) \upharpoonright_{[d)} (d)$$

pues

$$\{f_1\} \upharpoonright_{[d)} (d) = \{f_1 \upharpoonright_{[d)} = f \upharpoonright_{[d)}\} = \{f\} \upharpoonright_{[d)} (d)$$

$$\{f_1, V_0\} \upharpoonright_{[d)} (d) = \{f_1 \upharpoonright_{[d)} = f \upharpoonright_{[d)}, V_0 \upharpoonright_{[d)}\} = \{f, V_0\} \upharpoonright_{[d)} (d)$$

De manera similar podemos mostrar que

$$\Vdash_d (f_2, V_1) \upharpoonright_{[d)} = (f, V_1)$$

lo que contradice el forzamiento de la funcionalidad de g.

Se forzara entonces una versión intuicionisticamente equivalente a la traducción e Gödel de: Para toda familia $\mathcal{F}$ no vacía, de conjuntos disjuntos no vacíos, existe E tal que $E \cap X = \{x\}$ para todo $X \in \mathcal{F}$. Entonces vamos a forzar una version intuicionisticamente equivalente a la traducción de Gödel de

$$\mathrm{AC} := \forall \mathcal{F}(\forall X \forall Y \varphi \to \psi)$$

donde

$$\varphi := X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F} \to ((\exists z(z \in X \wedge z \in Y) \to X = Y) \wedge \exists z(z \in X))$$

$$\psi := \exists E(X \in \mathcal{F} \to \exists a(a \in E \wedge a \in X \wedge \forall b(b \in E \wedge b \in X \to b = a)))$$

A saber, forzaremos $\neg\neg\mathrm{AC}^*$, donde AC^* recordemos es aquella formula resultante de cambiar cada aparición de una subformula $\forall x \phi(x)$ en AC por $\forall x \neg\neg\phi^*(x)$. Sabemos que esta es equivalente a la traducción de Gödel de AC. Otros resultados del intuicionismo que nos serán útiles serán los siguientes:

$$(*) \Vdash_p \neg\neg(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \alpha \to \neg\neg\beta$$

$$(**) \Vdash_p \neg\neg\forall x \neg\neg\varphi \leftrightarrow \forall x \neg\neg\varphi$$

entonces

$$\Vdash_p \neg\neg\mathrm{AC}^* \leftrightarrow \forall \mathcal{F}(\forall X \forall Y \varphi \to \neg\neg\psi^*)$$

ya que

$$\begin{aligned}
\Vdash_p \neg\neg\mathrm{AC}^* &\leftrightarrow \neg\neg\forall\mathcal{F}\neg\neg(\forall x \forall y \varphi \to \psi)^* \\
&\leftrightarrow \neg\neg\forall\mathcal{F}\neg\neg(\forall x \neg\neg(\forall y \varphi \to \psi)^*) \\
&\leftrightarrow \neg\neg\forall\mathcal{F}\neg\neg(\forall x \neg\neg(\forall y \neg\neg(\varphi \to \psi^*)(\text{ por que } \varphi \text{ no tiene } \forall) \\
&\leftrightarrow \forall \mathcal{F}(\forall X \forall Y \varphi \to \neg\neg\psi^*)(\text{por } (*) \text{ y } (**))
\end{aligned}$$

Teorema 3.10. *Dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p \neg\neg AC^*$$

Demostración. Sean $\mathcal{F}, X, Y \in V(p)$ arbitrarios y para $q \geq p$, supongamos que $\Vdash_q \varphi$, debemos mostrar $\Vdash_q \neg\neg\psi^*$. Antes que todo notemos que por $(*)$,

$$\Vdash_q \psi^* \leftrightarrow \exists E(X \in \mathcal{F} \to \exists a(a \in E \wedge a \in X \wedge \forall b(b \in E \wedge b \in X \to \neg\neg(b = a)))$$

Construyamos ahora el testigo de este existencial. En primera instancia bien ordenamos $\bigcup_{q \geq p} \mathcal{F}(q)$, entonces podemos suponer

$$\bigcup_{q \geq p} \mathcal{F}(q) = \{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

escogeremos entonces elementos de $\{X_\alpha(q)\}_{\alpha \in \gamma}$, para $X_\alpha \in V(q)$ de la siguiente manera dado α si ya se escogió un elemento $X_\alpha(q)$ no haga nada y pase a $X_{\alpha+1}$, de lo contrario tome x_α en $X_\alpha(q)$ y tome $x_\beta = x_\alpha \restriction_{[r)}$ en sus imágenes futuras $X_\beta = X_\alpha \restriction_{[r)}$. Definamos ahora si

$$E : [q) \to \bigcup_{r \geq q} V(q)$$

$$E(q) = \{x_\alpha : X_\alpha \in \mathcal{F}(q)\}$$

es claro que $E \in V(q)$ por construcción, ya que $E(q) \subset V(q)$ pues bien $X_\alpha(q) \subset V(q)$, debido a que $X_\alpha \in V(q)$, por otro lado dado $r \geq q$, si $x_\alpha \in E(q)$, $x_\alpha \restriction_{[r)} \in X_\alpha(r)$ y además es el elemento que se escoge en $X_\alpha \restriction_{[r)}$ por construcción. Otra observación importante es notar que también por construcción en $X_\alpha(q) \cap E(q)$ hay un solo elemento. Ahora para mostrar $\Vdash_q \neg\neg\psi^*$ basta encontrar $t \geq r \geq q$ para el cual $\Vdash_t \psi^*$. Como $X \in \mathcal{F}(q)$, entonces $X \restriction_{[r)} \in \mathcal{F}(r)$, por lo cual $X \restriction [r) = X_\alpha$ para algún $\alpha \in \gamma$. Existe entonces $t \geq r$ y $X_\beta \in \mathcal{F}(t)$ tal que $X_\beta = X_\alpha \restriction_{[t)}$. En el paso β se escogió un elemento $x_\beta \in X_\beta(t)$, por definición de E, $x_\beta \in E(t)$ y $x_\beta \in X(t) = X_\alpha(t) = X_\beta(t)$ y es el único que cumple estas dos cosas, es así que tenemos en t,

$$\Vdash_t \exists E(X \in \mathcal{F} \to \exists a(a \in E \wedge a \in X \wedge \forall b(b \in E \wedge b \in X \to \neg\neg(b = a)))$$

entonces concluimos que

$$\Vdash_q \psi^*$$

como queríamos. □

Corolario 3.2. *dado $p \in \mathbb{P}$,*

$$\Vdash_p AC^G$$

Teorema 3.11. *Dado $\mathbb{P}$ un orden parcial con la topología de sus subconjuntos hereditarios tenemos*

$$\mathbb{V} \Vdash_{\mathbb{P}} ZFC$$

Teorema 3.12. *Dado $\mathbb{P}$ un orden parcial con la topología de sus subconjuntos hereditarios y $\mathcal{F}$ un filtro genérico sobre $\mathbb{P}$*

$$\mathbb{V}^*[\mathcal{F}] \models ZFC$$

Capítulo 4

Independencia de la Hipótesis del Continuo

Entramos ahora en el objetivo principal de este trabajo, mostrar que existe un modelo sobre un ordenado en el cual se fuerzan los axiomas de ZFC y donde la hipótesis del continuo falla.
La hipótesis del continuo en su versión original, es decir tal como la planteo Cantor, nos dice que todo conjunto de numeros reales es enumerable o tiene la cardinalidad del continuo (la recta real), $2^{\aleph_0}$. Si este resultado fuera cierto nos llevaría a pensar que $2^{\aleph_0}$ es precisamente el cardinal inmediatamente posterior a $\aleph_0$, otra forma de plantear la hipótesis del continuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Es claro de la construcción de Dedekind de los numeros reales que podemos identificar estos, por lo menos en lo que refiere a su cardinalidad, con subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por el argumento de la diagonal de cantor sabemos $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$, la hipótesis del continuo nos diría entonces que no existe un cardinal entre $|\mathbb{N}|$ y $|P(\mathbb{N})|$. Es precisamente esta última condición la que vamos a violar, hallaremos un orden $\mathbb{P}$ y un objeto B para el cual, dado $p \in \mathbb{P}$, $\Vdash_p |\mathbb{N}| < |B| < |P(\mathbb{N})|$.

4.1. Introducción

La prueba de Cohen de $Con(ZFC + \neg CH)$ nos dará claridad de como proceder. Su prueba a grandes rangos es la siguiente: Comienza con un modelo enumerable transitivo, M, de ZFC. Dentro de este considera un conjunto B cuyo cardinal es mayor que el cardinal de $P(\mathbb{N})$. Luego construye un modelo M' de ZFC en el cual existe

$$g : B \to P(\mathbb{N})$$

una función inyectiva, esto significaría bajo ciertas construcciones que

$$M' \models |\mathbb{N}| < |g(B)| < |P(\mathbb{N})|$$

Como se realiza dicha construcción? Bien, ya que $|P(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$ uno puede reemplazar la función g por su transpuesta

$$f : B \times \mathbb{N} \to 2$$

$$f(b, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin g(b) \\ 1 & \text{si } n \in g(b) \end{cases}$$

la cual en realidad nos esta dando numerosas funciones de $\mathbb{N}$ en 2, ya que dado $b \in B$ podemos construir

$$f_b : \mathbb{N} \to 2$$

$$f_b(n) = f(b, n)$$

como g es inyectiva dados $b, b' \in B$ distintos debe existir n para el cual $f(b, n) \neq f(b', n)$ por lo tanto $f_b \neq f_{b'}$. En el modelo original Cohen noto que no existe tal función f pero existen aproximaciones finitas de esta, es decir funciones parciales finitas de $B \times \mathbb{N}$ en ω, estas funciones junto con la inclusion forman un orden parcial, tomando simplemente G un filtro genérico sobre este orden, $\bigcup G$ sería la función f en M' quien en realidad es una extension genérica de M.

Procederemos de la siguiente manera, en primer termino construiremos nuestro modelo sobre el mismo orden de Cohen tomando $B = P(P(\omega))$, es decir $\mathbb{P} = fin(P(P(\omega)) \times \omega \to 2)$ las funciones parciales finitas de $P(P(\omega)) \times \omega$ en 2 ordenadas por inclusión, donde finitas significa que su dominio tiene cardinal finito. Veremos que quien se fuerza como ω en cada nodo p será precisamente $\widehat{\omega}(p)$ posterior a esto mostraremos

$$\Vdash_p |\widehat{\omega}(p)| < |\widehat{P(\omega)}(p)| < |\widehat{P(P(\omega))}(p)|$$

Y finalmente construiremos un g para el cual

$$\Vdash_p \text{“}g : \widehat{P(P(\omega))}(p) \to P(\omega) \text{ es una función inyectiva ”}$$

4.2. El subobjeto clasificador Ω

Como vimos en la prueba de Cohen es fundamental poder identificar a $P(\omega)$ con 2^ω, en nuestra prueba igualmente será importante hacer una construcción análoga. Para esto sera necesario introducir un nuevo objeto Ω que jugara el papel que juega el 2 en dicha construcción. Para entender de donde proviene Ω será útil recordar como es que podemos identificar a $P(\omega)$ con 2^ω. Dado $S \subseteq \omega$ podemos construir

$$\chi_S : \omega \to 2$$

$$\chi_S(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin S \\ 1 & \text{si } n \in S \end{cases}$$

Por otro lado dada $f : \omega \to 2$ podemos construir $S_f = \{x \in \omega : f(x) = 1\}$ note que $\chi_{S_f} = f$. Entonces la asignación para $S \subseteq \omega$ de χ_S, determina una biyección entre $P(\omega)$ y 2^ω. Aquí el papel de 2 es ser simplemente el conjunto de valores de verdad de nuestra lógica clásica. Pensemos entonces como son los valores de verdad en nuestro modelo $\mathbb{V}$. Sabemos que a diferencia de la lógica clásica en nuestro modelo una sentencia no es verdadera o falsa, en nuestro modelo los valores de verdad van a estar condicionados por el contexto. Dada una sentencia φ a esta le corresponde un subconjunto de $\mathbb{P}$ de los nodos donde esta sentencia es forzada (o donde es verdad). Como dado $q \geq p$ si $\Vdash_p \varphi$ entonces $\Vdash_q \varphi$ entonces para cada φ el conjunto A de los nodos donde φ es forzada tiene la siguiente propiedad

$$\text{Si } p \in A \text{ y } q \geq p \text{ entonces } q \in A$$

un conjunto con esta propiedad lo llamaremos hereditario, notaremos como $\mathbb{P}^+$ al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos hereditarios de $\mathbb{P}$. Entonces una valuación es simplemente una función del conjunto de sentencias en $\mathbb{P}^+$ donde a cada formula π_i se le asigna el conjunto de nodos donde es forzada. Definimos entonces

$$\Omega : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^+$$

$$\Omega(p) = [p)^+$$

donde $[p)^+$ es simplemente el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos hereditarios de $[p)$. Al igual que 2 es una forma de ver los valores de verdad dentro del modelo, tomaremos $\widehat{\Omega(p)}$ y mostraremos

$$\Vdash_p |\widehat{\Omega(p)}(p)^\omega| = |P(\omega)|$$

Para mostrar esto será necesario antes que todo saber quienes son forzados como ω y como $P(\omega)$. Cuando vimos que el axioma de infinito era forzado, vimos que para cada nodo p, se forzaba que $\widehat{\omega}(p)$ era inductivo; veremos además que este es precisamente el mínimo inductivo es decir que este corresponde a quien es forzado como ω en $V(p)$.

Lema 4.1. *(“$\widehat{\omega}(p)$ es el mínimo inductivo en $V(p)$”)*

$$\Vdash_p \forall S((\widehat{\emptyset}(p) \in S \wedge (\forall x(x \in S \to Suc(x) \in S))) \to \widehat{\omega}(p) \subseteq S)$$

Demostración. Queremos mostrar que dado $q \geq p$ y $f \in V(q)$ tenemos que:

$$\Vdash_q (\widehat{\emptyset}(q) \in f \wedge (\forall x(x \in f \rightarrow Suc(x) \in f))) \rightarrow \widehat{\omega}(q) \subseteq f$$

es decir que dado $t \geq q$ si tenemos que $\Vdash_t (\widehat{\emptyset}(t) \in f \wedge (\forall x(x \in f \rightarrow Suc(x) \in f)))$ entonces $\Vdash_t \widehat{\omega}(t) \subseteq f$; esta última afirmación equivale a mostrar que $\Vdash_t \forall x(x \in \widehat{\omega}(t) \rightarrow x \in f)$.
Ahora bien si tenemos que $\Vdash_t (\widehat{\emptyset}(t) \in f \wedge (\forall x(x \in f \rightarrow Suc(x) \in f)))$ por lo tanto $\Vdash_t \widehat{\emptyset}(t) \in f$ y $\Vdash_t \forall x(x \in f \rightarrow Suc(x) \in f)$ esto significa que $\widehat{\emptyset}(t) \in f(t)$ y que dado $r \geq t$ y $x \in V(r)$ se tiene que $\Vdash_r (x \in f \rightarrow Suc(x) \in f)$ es decir que dado $s \geq r$ si $\Vdash_s x \in f$ entonces $\Vdash_s Suc(x) \in f$. Note que igualmente tenemos $\Vdash_s \widehat{\emptyset}(s) \in f$. En conclusión tenemos que $\widehat{\emptyset}(s) \in f(s)$ y que si $x \in f(s)$ entonces $Suc(x) \in f(s)$. Basta mostrar entonces que $\widehat{\omega}(s)(s) \subseteq f(s)$ pues bien esto implica que para $f_1 \in \widehat{\omega}(s)(s)$ tenemos que $f_1 \in g(s)$ por lo tanto se sigue que si $\Vdash_s f_1 \in \widehat{\omega}(s)$ entonces $\Vdash_s f_1 \in f$ de esta manera tendríamos que $\Vdash_r (f_1 \in \widehat{\omega}(r) \rightarrow f_1 \in f)$ y como f era arbitrario en $V(r)$ tendríamos que:

$$\Vdash_t \forall x(x \in \widehat{\omega}(t) \rightarrow x \in f)$$

como queríamos mostrar. Mostremos entonces que $\widehat{\omega}(s)(s) \subseteq f(s)$ considerando lo que tenemos. Supongamos que $\widehat{\omega}(s)(s) \nsubseteq f(s)$. Sea n el mínimo para el cual $\widehat{n}(s) \notin f(s)$, como tenemos que $\widehat{\emptyset}(s) \in f(s)$ entonces $n \neq 0$. Sea m tal que $m + 1 = n$, tenemos entonces que $\widehat{m}(s) \in f(s)$ por lo tanto $Suc(\widehat{m}(s)) \in f(s)$ pero como vimos anteriormente $Suc(\widehat{m}(s)) = \widehat{m+1}(s) = \widehat{n}(s)$ lo cual es una contradicción respecto a la minimalidad de n. □

Corolario 4.1. $\Vdash_p \omega = \widehat{\omega}(p)$

□

Por otro lado el objeto que es forzado como $P(\omega)$ según el axioma del conjunto potencia es:

$$G : [p] \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$G(q) = \{h : [q] \rightarrow \bigcup_{r \geq q} P(\widehat{\omega}(p)(r)) : (r \geq q \Rightarrow h(r) \subseteq \widehat{\omega}(p)(r)) \wedge (t \geq r \geq q \Rightarrow \forall i \in h(r), i \restriction_{[t)} \in h(t))\}$$

Tenemos ahora, todas las herramientas para construir la biyección que estamos buscando.Dado H para el cual $\Vdash_p H \in G$ definimos

$$\chi(H) = \chi_H : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\chi_H(q) = \{(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p : \Vdash_r \widehat{n}(r) \in H\}\}$$

Sea entonces

$$\chi : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\chi(q) = \{(H, \chi_H \restriction_{[q)}) : H \in G(p)\}$$

Los objetos que en estas definiciones son notados como tuplas son en realidad los objetos que son forzados como tales.

Lema 4.2. *Dado $p \in \mathbb{P}$ y H tal que $\Vdash_p H \in G$*

$$\Vdash_p \text{“}\chi_H \textit{ es una función de } \widehat{\omega}(p) \textit{ en } \widehat{\Omega(p)}(p)\text{”}$$

Demostración. Lo primero que hemos de mostrar es $\chi_H \in V(p)$. Es claro que $\chi_H(q) = \{(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p : \Vdash_r \widehat{n}(r) \in H\}\} \subset V(q)$ ya que como $\widehat{n}(q), \widehat{K}(q) \in V(q)$ entonces $(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) \in V(q)$. Por otro lado si $g \in \chi_H(q)$ entonces $g = (\widehat{n}(q), \widehat{K}(q))$ para algún $n \in \omega$ y algún $K \subseteq \mathbb{P}$ tal que $K = \{r \geq p | \Vdash_r \widehat{n}(r) \in H\}$, entonces para $t \geq q$

$$g \restriction_{[t)} = (\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) \restriction_{[t)} = \widehat{(n, K)}(q) \restriction_{[t)} = \widehat{(n, K)}(t) = (\widehat{n}(t), \widehat{K}(t))$$

y
$$(\widehat{n}(t), \widehat{K}(t)) \in \chi_H(t) = \{(\widehat{n}(t), \widehat{K}(t)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p :\Vdash_r \widehat{n}(r) \in H\}\}$$

Ahora sabemos que para mostrar que χ_H se fuerza como función de $\widehat{\omega}(p)$ en $\widehat{\Omega(p)}(p)$ basta mostrar que es un funcional de $\widehat{\omega}(p)$ en $\widehat{\Omega(p)}(p)$. Antes que todo veremos la buena definición, si $\Vdash_p (\widehat{n}(p), \widehat{K}(p)) \in \chi_H$ entonces dado $r \in K$ tenemos que $\widehat{n}(r) \in H(r)$, si $s \geq r$ por definición de G tenemos que $\widehat{n}(r) \restriction_{[s)} = \widehat{n}(s) \in H(s)$ por lo tanto $s \in K$, concluimos así que $K \in [p)^+$ y por lo tanto $\Vdash_p \widehat{K}(p) \in \widehat{\Omega(p)}(p)$. Es claro entonces que dado $q \geq p$, $\Vdash_q \chi_H \subset \widehat{\omega}(q) \times \widehat{\Omega(p)}(q)$. Por otro lado dado $\widehat{n}(q) \in \widehat{\omega}(q)(q)$ sabemos que $K = \{r \geq p : \widehat{n}(r) \in H(r)\}$ es el único para el cual $\Vdash_q (\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) \in \chi_H$. □

Corolario 4.2. *Dado $p \in \mathbb{P}$, y H tal que $\Vdash_p H \in G$*

$$\Vdash_p \chi_H \in \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$$

□

Lema 4.3. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $\quad \chi \in V(p)$*

Demostración. Es claro que dado $q \geq p$, $\chi(q) = \{(H, \chi_H \restriction_{[q)}) : H \in G(p)\} \subseteq V(q)$ pues bien $H \in V(q)$ y $\chi_H \restriction_{[q)} \in V(q)$ por lo tanto $(H, \chi_H \restriction_{[q)}) \in V(q)$. Por otro lado dado $t \geq q \geq p$, si $g \in \chi(q)$ entonces $g = (H, \chi_H \restriction_{[q)})$ para algún H tal que $\Vdash_p H \in G$. Entonces $g \restriction_{[t)} = (H, \chi_H) \restriction_{[t)} = (H, \chi_H \restriction_{[t)}) \in \chi(t) = \{(H, \chi_H \restriction_{[t)}) : H \in G(p)\}$. □

Teorema 4.1.
$$\Vdash_p \text{“}\chi \textit{ es una función biyectiva de } G \textit{ en } \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}\text{”}$$

Demostración. Se mostrará que

$$\Vdash_p \chi \text{ es funcion de } G \quad en \quad \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)} \wedge \chi \quad es \quad inyectiva \wedge \chi \quad es \quad sobre$$

1. $\Vdash_p \chi$ es función de G en $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$: Basta mostrar de nuevo que χ es un funcional de G en $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$. Es claro que para $q \geq p$, $\Vdash_q \chi \subset G \times \widehat{\Omega(p)}(p)$ por el lema anterior. Por otro lado para H tal que $\Vdash_q H \in G$, $\chi_H \restriction_{[q)}$ es el único tal que $\Vdash_q (H, \chi_H \restriction_{[q)}) \in \chi$.
2.$\Vdash_p \forall x \forall y (x \in G \wedge y \in G \wedge x \neq y) \rightarrow (\chi_x \neq \chi_y)$(“$\chi$ es inyectiva”): Dado así $q \geq p$ y x y y arbitrarios en $V(q)$ queremos mostrar que $\Vdash_q (x \in G \wedge y \in G \wedge x \neq y) \rightarrow (\chi_x \neq \chi_y)$. Sea $t \geq q \geq p$, supongamos que $\Vdash_t x \in G \wedge y \in G \wedge x \neq y$, es decir que $x \in G(t)$ y $y \in G(t)$ y que para todo $r \geq t$ tenemos que $\nVdash_r x = y$ o lo que es lo mismo, para todo $r \geq t$ existe $s \geq r$ y $n \in \omega$ tal que $\Vdash_s \widehat{n}(s) \in x$ y $\nVdash_s \widehat{n}(s) \in Y$. Veremos ahora que para $r \geq t$, $\nVdash_r \chi_x = \chi_y$. Tome $r \geq t$ entonces existe $s \geq r$ y $n \in \omega$ tales que $\Vdash_s \widehat{n}(s) \in x$ y $\nVdash_s \widehat{n}(s) \in y$ entonces
$$\Vdash_r \widehat{s}(r) \in \chi_x(\widehat{n}(r)) = \{\widehat{q}(r) : q \geq p \wedge \Vdash_q \widehat{n}(q) \in x\}$$
mientras $\Vdash_r \widehat{s}(r) \notin \chi_y(\widehat{n}(r))$ ya que dado $v \geq r$,

$$\nVdash_v \widehat{s}(v) \in \chi_y(\widehat{n}(v))$$

pues de lo contrario
$$\widehat{s}(v) \in \chi_y(\widehat{n}(v))(v) = \{\widehat{q}(v) : q \geq p \wedge \Vdash_q \widehat{n}(q) \in y\}$$
lo que implicaría $\Vdash_s \widehat{n}(s) \in y$, una contradicción. Por lo tanto $\nVdash_r \chi_x(\widehat{n}(r)) = \chi_y(\widehat{n}(r))$ y finalmente $\nVdash_r \chi_x = \chi_y$.
3. χ es sobre:$\Vdash_p \forall x (x \in \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)} \rightarrow \exists y (y \in G \wedge \chi_y = x$. Dado φ para el cual $\Vdash_p \varphi \in \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$ definimos
$$S_\varphi : [p) \rightarrow \bigcup_{q \geq p} P(\widehat{\omega}(p)(q))$$
$$S_\varphi(q) = \{\widehat{n}(q) :\Vdash_q \widehat{q}(q) \in \varphi(\widehat{n}(q))\}$$
Veamos que $\Vdash_p S_\varphi \in G$, es claro para $q \geq p$ que $S_\varphi(q) \subseteq \widehat{\omega}(p)(q)$, por otro lado dado $t \geq q \geq p$ si $g \in S_\varphi(q)$ entonces $g = \widehat{n}(q)$ para algún $n \in \omega$ tal que $\Vdash_q \widehat{q}(q) \in \varphi(\widehat{n}(q))$, ahora $g \restriction_{[t)} = \widehat{n}(t)$ y como

$\varphi(\widehat{n}(t)) = \widehat{M}(t)$ para algún $M \in [p)^+$ como $t \geq q$ entonces $t \in M$ y $\Vdash_q \widehat{t}(q) \in \varphi(\widehat{n}(q))$ por lo tanto $\Vdash_t \widehat{t}(t) \in \varphi(\widehat{n}(t))$ concluyendo así que $g \restriction_{[t)} \in S_\varphi(t)$. Ahora mostraremos que $\Vdash_p \chi_{S_\varphi} = \varphi$.

$$\begin{aligned}
\chi_{S_\varphi}(q) &= \{(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p : \widehat{n}(r) \in S_\varphi(r)\}\} \\
&= \{(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p : \widehat{n}(r) \in \{\widehat{m}(r) : \Vdash_r \widehat{r}(r) \in \varphi(\widehat{m}(r))\}\}\} \\
&= \{(\widehat{n}(q), \widehat{K}(q)) : n \in \omega \wedge K = \{r \geq p : \Vdash_r \widehat{r}(r) \in \varphi(\widehat{n}(r))\}\} \\
&= \{(\widehat{n}(q), \varphi(\widehat{n}(q))) : n \in \omega\} = \varphi(q)
\end{aligned}$$

□

4.3. Más sobre funciones en $V(p)$

El objetivo de esta sección será mostrar que dado $p \in \mathbb{P}$

$$\Vdash_p |\widehat{\omega}(p)| < |\widehat{P(\omega)}(p)| < |\widehat{P(P(\omega))}(p)|$$

para esto mostraremos que en en el nodo p se fuerza la negación de la existencia de una función sobreyectiva de $\widehat{\omega}(p)$ en $\widehat{P(\omega)}(p)$ y de $\widehat{P(\omega)}(p)$ en $\widehat{P(P(\omega))}(p)$, mostrando que si esto no ocurriera, implicaría la existencia de una función sobreyectiva de ω en $P(\omega)$ e igualmente la existencia de una función sobreyectiva de $P(\omega)$ en $P(P(\omega))$.

Teorema 4.2. $\Vdash_p \neg\exists f(f \subseteq (\widehat{\omega \times P(\omega)})(p) \wedge f$ *función* $\wedge f$ *sobre*)

Demostración. Queremos mostrar entonces que dado $q \geq p$

$$\nVdash_q \exists f(f \subseteq (\widehat{\omega \times P(\omega)})(p) \wedge f \text{ función} \wedge f \text{ sobre})$$

Supongamos que existe un $t \geq p$ donde la afirmación si se fuerza; es decir que para algún f en $V(t)$ tenemos que:

$$\Vdash_t (f \subseteq (\widehat{\omega \times P(\omega)})(t) \wedge f \text{ función} \wedge f \text{ sobre})$$

- Donde $f \subseteq \widehat{\omega \times P(\omega)}(t)$ quiere decir:

$$\Vdash_t \forall x(x \in f \to x \in \widehat{\omega \times P(\omega)}(t))$$

es decir que dado $r \geq t$ y x en $V(r)$ tenemos

$$\Vdash_r x \in f \to x \in \widehat{\omega \times P(\omega)}(p)$$

por lo tanto se tiene que para $s \geq r \geq t$, $\Vdash_s x \in f$ implica $\Vdash_s x \in \widehat{\omega \times P(\omega)}(s)$ por lo tanto tenemos que $x \in f(s)$ implica $x \in \widehat{\omega \times P(\omega)}(s)(s)$. Observe que las afirmaciones anteriores valen para $r = t = s$ esto será también importante observarlo en lo que sigue.
••Por otra parte f función significa que:

$$\Vdash_t \forall x(x \in \widehat{\omega}(t) \to ((\exists y(y \in \widehat{P(\omega)}(t) \wedge (x, y) \in f)) \wedge (\forall a \forall b((x, a) \in f \wedge (x, b) \in f) \to a = b)))$$

es decir que dado $r \geq t$ y x en $V(r)$ tenemos que

$$\Vdash_r (x \in \widehat{\omega}(r) \to ((\exists y(y \in \widehat{P(\omega)}(r) \wedge (x, y) \in f)) \wedge (\forall a \forall b((x, a) \in f \wedge (x, b) \in f) \to a = b)))$$

lo que significa que dado $s \geq r$ tenemos que $\Vdash_s x \in \widehat{\omega}(s)$ implica $\Vdash_s ((\exists y(y \in \widehat{P(\omega)}(s) \wedge (x, y) \in f)) \wedge (\forall a \forall b((x, a) \in f \wedge (x, b) \in f) \to a = b)))$ por lo tanto tenemos que si $x \in \widehat{\omega}(s)$ entonces existe $y \in V(s)$ tal que $y \in \widehat{P(\omega)}(s)(s)$ y $(x, y) \in f(s)$, además si $a, b \in V(s)$ dado $v \geq s \geq r \geq t$, $\Vdash_v (x, a) \in f$

y $\Vdash_v (x,b) \in f$ implican $a = b$.
• • • Por último tenemos que f sobre significa

$$\Vdash_t \forall y(y \in \widehat{P(\omega)}(t) \to \exists x(x \in \widehat{\omega}(t) \wedge (x,y) \in f))$$

lo cual nos lleva a que dado $r \geq t$ y y en $V(r)$

$$\Vdash_r (y \in \widehat{P(\omega)}(r) \to \exists x(x \in \widehat{\omega}(t) \wedge (x,y) \in f))$$

se sigue entonces que dado $s \geq r \geq t$ si tenemos $\Vdash_s y \in \widehat{P(\omega)}(s)$ entonces $\Vdash_s \exists x(x \in \widehat{\omega}(s) \wedge (x,y) \in f$. En ultimas tenemos que $y \in \widehat{P(\omega)}(s)(s)$ implica que para algún x en $V(s)$ se cumple que $x \in \widehat{\omega}(s)(s)$ y $(x,y) \in f(s)$.

Ahora usando lo anterior vamos a definir una función sobreyectiva de ω en $P(\omega)$.Sea

$$f_1 = \{(a,b) : \widehat{(a,b)}(t) \in f(t)\}$$

1.$f_1 \subseteq \omega \times P(\omega)$:
Dado $(a,b) \in f_1$ como $\widehat{(a,b)}(t) \in f(t)$ entonces $\widehat{(a,b)}(t) \in (\omega \widehat{\times P(\omega)})(t)(t)$ entonces $(\widehat{a}(t), \widehat{b}(t)) \in (\widehat{\omega}(t) \times \widehat{P(\omega)}(t))(t)$ por lo tanto $\widehat{a}(t) \in \widehat{\omega}(t)(t)$ por lo cual $a \in \omega$ y de igual manera concluimos que $b \in P(\omega)$.
2.f_1 es función de ω en $P(\omega)$:
Dado $a \in \omega$ entonces $\widehat{a}(t) \in \widehat{\omega}(t)(t)$ por lo tanto como vimos anteriormente esto implica que existe $y \in \widehat{P(\omega)}(t)(t)$ para el cual $(\widehat{a}(t), y) \in f(t)$, pero entonces $y = \widehat{b}(t)$ para $b \in P(\omega)$ concluimos así que $(a,b) \in f_1$. Ahora bien si $(a,x) \in f_1$ y $(a,y) \in f_1$ tenemos que $\widehat{(a,x)}(t) \in f(t)$ y $\widehat{(a,y)}(t) \in f(t)$ por lo tanto $\widehat{x}(t) = \widehat{y}(t)$ entonces $x = y$.
3. f_1 es sobre:
Dado $b \in P(\omega)$ entonces $\widehat{b}(t) \in \widehat{P(\omega)}(t)(t)$ por lo tanto existe x en $V(t)$ para el cual $(x, \widehat{b}(t)) \in f(t)$ como tenemos entonces que $x = \widehat{a}(t)$ para algún $a \in \omega$ entonces $(\widehat{a}(t), \widehat{b}(t)) = \widehat{(a,b)}(t) \in f(t)$ entonces $(a,b) \in f_1$. □

Corolario 4.3. $\Vdash_p \neg\exists f(f \subseteq \widehat{P(\omega)}(p) \times \widehat{P(P(\omega))}(p) \wedge f$ *función* $\wedge f$ *sobre*)

El corolario se da debido a que en la demostración del teorema lo único necesario fue que no existiera una función sobreyectiva entre ω y $P(\omega)$. Podemos entonces establecer el siguiente resultado mas general.

Teorema 4.3. *Dados B, C conjuntos arbitrarios si no existe una función sobreyectiva de B en C entonces*

$$\Vdash_p \neg\exists f(f \subseteq (\widehat{B \times C})(p) \wedge f \textit{ función } \wedge f \textit{ sobre })$$

Corolario 4.4. *Dados B, C conjuntos arbitrarios si $|B| < |C|$ entonces* $\Vdash_p |\widehat{B}(p)| < |\widehat{C}(p)|$

Corolario 4.5.

$$\Vdash_p |\widehat{\omega}(p)| < |\widehat{P(\omega)}(p)| < |\widehat{P(P(\omega))}(p)|$$

4.4. Independencia de la Hipótesis del Continuo

Hasta ahora los resultados que hemos presentado en este capitulo han sido independientes de la estructura del orden. De aquí en adelante la estructura del orden será fundamental para concluir nuestra tarea. Para lo que desarrollemos a continuación $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle = \langle fin(P(P(\omega)) \times \omega \to 2), \subseteq \rangle$.

Dado $p \in \mathbb{P}$ definimos

$$A : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$A(q) = \{(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q)) : q(H,n) = 1\}$$

Lema 4.4. *$A \in V(p)$ y*

$$\Vdash_p A \subseteq (\widehat{P(P(\omega))}(p) \times \widehat{\omega}(p))$$

Demostración. En primera instancia dado $q \geq p$, tenemos $A(q) = \{(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q)) : q(H,n) = 1\} \subseteq V(q)$ claramente. Ahora dado $t \geq q \geq p$ si $g \in A(q)$ entonces $g = (\widehat{H}(q), \widehat{n}(q))$ para algún H y algún n tales que $q(H,n) = 1$, ahora $g \restriction_{[t)} = (\widehat{H}(t), \widehat{n}(t))$ y como $t \geq q$ entonces $t(H,n) = 1$ por lo tanto $g \restriction_{[t)} \in A(t)$. Por otro lado dado $q \geq p$ y $x \in V(q)$ entonces para $r \geq q$ si $\Vdash_r x \in A \restriction_{[r)}$ entonces $\Vdash_r x = (\widehat{H}(r), \widehat{n}(r))$ para H y n tales que $r(H,n) = 1$, por lo tanto $\Vdash_r x \in \widehat{P(P(\omega))}(r) \times \widehat{\omega}(r)$ □

Usando el objeto A recién definido podemos construir en $V(p)$ una inyección Φ entre $\widehat{P(P(\omega))}(p)$ y $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$ de la siguiente manera: Primero definimos

$$\chi_A : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\chi_A(q) = \{((\widehat{H}(q), \widehat{n}(q)), \widehat{K}(q)) : H \in P(P(\omega)), n \in \omega K = \{r \geq p : \Vdash_r (\widehat{H}(r), \widehat{n}(r)) \in A\}$$

Lema 4.5.
$$\Vdash_p \chi_A \text{ es una función de } \widehat{P(P(\omega))}(p) \times \widehat{\omega}(p) \text{ en } \widehat{\Omega(p)}(p)$$

Demostración. 1. $\chi_A \in V(p)$: Dado $r \geq q \geq p$ si $g \in \chi_A(q)$ entonces $g = ((\widehat{H}(q), \widehat{n}(q)), \widehat{K}(q))$ para H, n, K tales que $K = \{r \geq p : \Vdash_r (\widehat{H}(r), \widehat{n}(r)) \in A(r)\}$ entonces $g \restriction_{[t)} = ((\widehat{H}(t), \widehat{n}(t)), \widehat{K}(t)) \in \chi_A(t)$. Ahora para ver que es función basta ver que es un funcional lo que se ve claramente de la definición. □

La función que estamos buscando es en algún sentido la transpuesta de χ_A, con esto en mente definimos.

$$\Phi(\widehat{H}(p)) : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\Phi(\widehat{H}(p))(q) = \{(\widehat{n}(q), \chi_A(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q))) : n \in \omega\}$$

Lema 4.6. *Dado* $H \in P(P(\omega))$
$$\Vdash_p \Phi(\widehat{H}(p)) \in \widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$$

Demostración. $\Phi(\widehat{H}(p)) \in V(p)$: Dado $q \geq p$ $\Phi(\widehat{H}(p))(q) = \{(\widehat{n}(q), \chi_A(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q))) : n \in \omega\} \subseteq V(q)$, ya que para todo n, $\chi_A(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q)) \in V(q)$, por lo tanto $(\widehat{n}(q), \chi_A(\widehat{H}(q), \widehat{n}(q))) \in V(q)$. Dado $t \geq q \geq p$, si $g \in \Phi(\widehat{H}(p))(q)$ entonces $g = (\widehat{n}(q), \widehat{K}(q))$ donde $K = \{r \geq p | \Vdash_r (\widehat{H}(r), \widehat{n}(r)) \in A\}$ entonces $g \restriction_{[t)} = (\widehat{n}(t), \widehat{k}(t)) \in \Phi(\widehat{H}(p))(t)$. De la definición es claro que $\Phi(\widehat{H}(p))$ es un funcional de $\widehat{\omega}(p)$ en $\widehat{\Omega(p)}(p)$, por lo cual tenemos el resultado. □

$$\Phi : [p) \to \bigcup_{q \geq p} V(q)$$

$$\Phi(q) = \{(\widehat{H}(q), \Phi(\widehat{H}(q))) : H \in P(P(\omega))\}$$

Lema 4.7. $\Phi \in V(p)$

Demostración. Dado $q \geq p$, por el lema anterior tenemos que para todo $H \in P(P(\omega))$, $(\widehat{H}(q), \Phi(\widehat{H}(q))) \in V(q)$ y por lo tanto $\Phi(q) \subseteq V(q)$. Por otro lado dado $t \geq q \geq p$ y $g \in \Phi(q)$, $g = (\widehat{H}(q), \Phi(\widehat{H}(q)))$ y $g \restriction_{[t)} = (\widehat{H}(t), \Phi(\widehat{H}(q)) \restriction_{[t)})$ como

$$\Phi(\widehat{H}(q)) \restriction_{[t)} : [t) \to \bigcup s \geq tV(s)$$

$$\Phi(\widehat{H}(q)) \restriction_{[t)} (s) = \{(\widehat{n}(s), \chi_A(\widehat{H}(s), \widehat{n}(s))) : n \in \omega\}$$

entonces es claro que $\Phi(\widehat{H}(q)) \restriction_{[t)} = \Phi(\widehat{H}(t))$ entonces $g \restriction_{[t)} = (\widehat{H}(t), \Phi(\widehat{H}(t))) \in \Phi(t)$ □

Teorema 4.4. $\Vdash_p \Phi$ *es una función inyectiva de* $\widehat{P(P(\omega))}(p)$ *en* $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$.

Demostración. De la definición de Φ es claro que esta es una función en $V(p)$ de $\widehat{P(P(\omega))}(p)$ en $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$ pues es evidente que es un funcional de $\widehat{P(P(\omega))}(p)$ en $\widehat{\Omega(p)}(p)^{\widehat{\omega}(p)}$. Veremos que

$$\Vdash_p \forall x \forall y((x \in \widehat{P(P(\omega))}(p) \wedge y \in \widehat{P(P(\omega))}(p) \wedge x \neq y) \to \Phi(x) \neq \Phi(y))$$

es decir que para $q \geq p$ y x y y en $V(q)$ arbitrarios mostraremos que $\Vdash_q ((x \in \widehat{P(P(\omega))}(q) \wedge y \in \widehat{P(P(\omega))}(q) \wedge x \neq y) \to \Phi(x) \neq \Phi(y))$.Consideremos entonces $t \geq q \geq p$ para el cual tenemos que $\Vdash_t ((x \in \widehat{P(P(\omega))}(t) \wedge y \in \widehat{P(P(\omega))}(t) \wedge x \neq y)$ queremos concluir que $\Vdash_t \Phi(x) \neq \Phi(y)$. Tenemos entonces que $x \in \widehat{P(P(\omega))}(t)(t)$ y $y \in \widehat{P(P(\omega))}(t)(t)$ y además que para todo $r \geq t$, $\nVdash_r x = y$. Como $\Vdash_t x \in \widehat{P(P(\omega))}(t) \wedge y \in \widehat{P(P(\omega))}(t)$ entonces $x = \widehat{H}(r)$ y $y = \widehat{M}(r)$ para $H, M \in P(P(\omega))$, como además $\nVdash_t x = y$ entonces $\widehat{H}(t) \neq \widehat{M}(t)$ por lo tanto $H \neq M$. Como t es finito existe $n \in \omega$ tal que $t(H,n)$ y $t(M,n)$ no están definidos, construimos entonces $r > t$ tal que $r(H,n) = 1$ y $r(M,n) = 0$. Considere $s \geq t$ arbitrario observe que $\Vdash_s \widehat{r}(s) \in \Phi(\widehat{H}(s))(\widehat{n}(s)) = \chi_A(\widehat{H}(s), \widehat{n}(s))$ debido a que $r(H,n) = 1$. Veremos ahora que $\Vdash_s \widehat{r}(s) \notin \Phi(\widehat{M}(s))(\widehat{n}(s))$: Suponga que existe $v \geq s$, tal que $\Vdash_v \widehat{r}(v) \in \Phi(\widehat{M}(v))(\widehat{n}(v))$, esto implicaría que $r(M,n) = 1$ en contradicción con lo que habíamos establecido antes. De lo anterior se sigue que $\nVdash_s \Phi(\widehat{H}(s))(\widehat{n}(s)) = \Phi(\widehat{M}(s))(\widehat{n}(s))$ por lo tanto $\nVdash_s \Phi(\widehat{H}(s)) = \Phi(\widehat{M}(s))$ como $s \geq t$ era arbitrario tenemos entonces $\Vdash_t \Phi(\widehat{H}(t)) \neq \Phi(\widehat{M}(t))$ como buscábamos. □

Corolario 4.6.

$$\Vdash_p |\omega| < |\widehat{P(\omega)}(p)| < |P(\omega)|$$

□

Teorema 4.5. *Dado* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle = \langle fin(P(P(\omega)) \times \omega \to 2), \subseteq \rangle$,

$$\mathbb{V} = \langle \mathbb{P}, \leq, \{V(p)\}_{p \in \mathbb{P}}, \{t_{pq}\}_{(p,q) \in \leq} \rangle$$

es un modelo donde se fuerzan los axiomas de ZFC y donde la hipótesis del continuo falla.

□

Bibliografía

[Ca] Caicedo, Xavier, *Logica de los haces de Estructuras*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencia,1995.

[Vi] Villaveces, Andrés, *Modelos-Fibrados y Modelos-haces para la teoría de conjuntos* , Tesis de Maestría, Universidad de los Andes, Agosto 1991.

[Go] Goldblatt, Robert, *TOPOI, The Caregotial Analysis of Logic*, North-Holland, 1984.

[Ri] Rivera, Juan Carlos, *Haces implicitos del forcing de Cohen*, Tesis de Grado, Universidad de los Andes, 1997.

[Ku] Kunen, Kenneth, *Set Theory An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, 1980.

[Mac] Mac Lane, Saunders y Moerdijk, Ieke, *Sheaves in Geometry and Logic A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, 1992.

[Van] Van Dalen, Dirk *Logic and Sructure*, Springer-Verlag, 1980.

[Kri] Krivine, Jean Louis, *Theorie axiomatique des ensembles*, Presses Universitaires de France, 1972.

[Jec] Hrbacek, Karel y Jech, 1999. Thomas,*Introduction to Set Theory*, Basel : Marcel Dekker, 1999.

[Cas] De Castro Korgi, Rodrigo, *El universo Latex*, Universidad Nacional de Colombia, Fac. de Ciencias, Depto de Matemáticas y Estadística, 2001.

[MU] Munkres, James Raymond, *Topology : a first course*, Prentice Hall, 1975.