

CORSO DI PREPARAZIONE ALLE OLIMPIADI DELLA MATEMATICA
GARA A SQUADRE - 17 DICEMBRE 2014

ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni esercizio occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero compreso tra 0000 e 9999
- Se la soluzione è un numero intero maggiore di 9999 si indichino le ultime quattro cifre del numero
- Se la soluzione è un numero negativo oppure il problema non ammette soluzione si indichi come risposta 0000
- Se la soluzione è una frazione $\frac{a}{b}$ (con a, b primi tra loro e $b > 1$), indica come risposta l'intero $a + b$.
- Se la risposta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato si indichi la parte intera (cioè il più grande numero intero n minore o uguale a x)
- Per i calcoli utilizza i seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142, \quad \sqrt{3} = 1.7321, \quad \sqrt{5} = 2.2361, \quad \sqrt{7} = 2.6458, \quad \pi = 3.1415$$

- Non è ammesso l'uso di computer, calcolatrici, cellulari, carte da gioco.
-

- 1) Quanto vale la somma di tutti gli interi positivi minori di 520 con 10 divisori positivi?
- 2) Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(5) = 7$, $p(6) = -2$ e $p(0) < 10000$. Qual è il valore massimo che può assumere $p(0)$?
- 3) Quanti tra gli interi positivi minori di 2015 sono multipli di 3 e di 4 ma non di 5?
- 4) In un cubo di lato 1 metro, quanto misura in centimetri la distanza tra due diagonali di due facce adiacenti se queste sono sghembe?
- 5) In una scacchiera 7×7 tutte le caselle sono colorate di viola tranne due che sono bianche. Due colorazioni sono equivalenti se una si ottiene dall'altra tramite una rotazione della scacchiera. Quante sono le colorazioni possibili non equivalenti?
- 6) Determinare due numeri interi a e b tali che $\text{MCD}(a, b) = 12$, $\text{mcm}(a, b) = 432$ e tali che la somma $N = a + b$ sia minima. Quanto vale N ?
- 7) A Francesco viene chiesto di sostituire delle cifre al posto degli zeri al terzo e al quinto posto nel numero 3.000.003 in modo da ottenere un numero N multiplo di 13. Francesco si accorge che questo può essere fatto in vari modi ma che in un solo caso il numero N ottenuto è anche multiplo di 11. Quanto vale N ?
- 8) Dato un triangolo ABC equilatero di lato 60 cm, sia P un punto interno al triangolo tale che

$$\text{Area}(PAB) = \frac{\text{Area}(PCB)}{2} = \frac{\text{Area}(PAC)}{3}.$$
 Quanto misura in centimetri la più piccola delle lunghezze PA , PB e PC ?
- 9) Dato un numero razionale, lo si scriva come frazione ridotta ai minimi termini p/q e si calcoli il prodotto $N = p \cdot q$. Quanti sono i razionali positivi compresi tra zero e uno per cui $N = 20!$?
- 10) Data la successione $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 24$, $a_4 = 48$, \dots , formata dai multipli di tre sommando 1 ai quali si ottiene un quadrato perfetto. Quanto vale a_{2014} ?
- 11) Si considerino i numeri $a_n = 50 + n^2$, per n intero positivo. Quanto può valere al massimo $\text{MCD}(a_n, a_{n+1})$?
- 12) Sia ABC un triangolo acutangolo, sia AH una sua altezza ed O il suo circocentro. Sapendo che $\widehat{BAH} = 47^\circ$ e che $\widehat{BAC} = 57^\circ$, determinare l'ampiezza dell'angolo \widehat{HAO} .
- 13) Siano x, y, z tre numeri reali positivi tali che $xyz = 1$, $x + 1/z = 5$, $y + 1/x = 29$. Quanto vale $z + 1/y$?
- 14) Quanto vale la somma di tutte le soluzioni reali dell'equazione $3x - \lfloor x \rfloor = 8$? ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x cioè il più grande intero minore o uguale ad x)
- 15) In quanti modi è possibile scegliere 5 interi positivi minori o uguali a 18 in modo che la differenza tra due qualunque dei numeri scelti sia maggiore o uguale a 2?
- 16) Un triangolo ABC ha l'angolo in A di 60° , e l'angolo in B di 45° . La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in un punto T tale che $AT = 24$. Quanto vale l'area del triangolo?
- 17) In quanti modi è possibile scegliere una quaterna di numeri interi positivi x_1, x_2, x_3, x_4 in modo che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$?
- 18) Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi tali che $P(P(x)) = (P(x))^{16} + x^{48} + Q(x)$. Determina il grado minimo possibile per Q .
- 19) Calcolare la somma

$$\frac{5}{5 + 25^{\frac{1}{2015}}} + \frac{5}{5 + 25^{\frac{2}{2015}}} + \dots + \frac{5}{5 + 25^{\frac{2014}{2015}}}.$$
- 20) Sia n un numero intero positivo scritto in base 10 tale che quando le sue cifre sono lette in base 20 il numero risultante ha due volte il valore di quando le sue cifre sono interpretate in base 13. Trovare la somma di tutti i valori possibili di n .