Introduzione alla geometria dei quaternioni

Giorgio Ottaviani

Contents

1 I quaternioni

Definizione 1.1 *Un quaternione è una matrice* 2×2 *a coefficienti complessi della forma*

$$\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

con $z, w \in \mathbf{C}$.

Denotiamo con $\mathbf{H}$ l'insieme dei quaternioni.

Proposizione 1.2 *La somma e il prodotto usuale tra matrici inducono su* $\mathbf{H}$ *una struttura di corpo, cioè di campo non necessariamente commutativo.*

Dimostrazione La matrice nulla appartiene a $\mathbf{H}$. $\mathbf{H}$ è chiuso rispetto alla somma e all'opposto. La matrice identità appartiene a $\mathbf{H}$. Il prodotto di due elementi di $\mathbf{H}$

$$\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h & -k \\ \overline{k} & \overline{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zh - w\overline{k} & -zk - w\overline{h} \\ \overline{z}\overline{k} + \overline{w}h & \overline{z}\overline{h} - \overline{w}k \end{bmatrix}$$

appartiene ancora ad $\mathbf{H}$. Infine per l'inverso notiamo che $\det \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = |z|^2 + |w|^2$, quindi tutti gli elementi di $\mathbf{H} \setminus \{0\}$ sono invertibili ed abbiamo

$$\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \begin{bmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{bmatrix}$$

Pertanto l'inverso di un elemento di $\mathbf{H}\setminus\{0\}$ appartiene ancora a $\mathbf{H}\setminus\{0\}$. Notiamo che la matrice a membro destro è la coniugata della trasposta della matrice originaria, questo sarà utile tra poco. Le proprietà associativa e distributiva seguono dalle analoghe proprietà delle operazioni tra matrici. □

Dal punto di vista additivo $\mathbf{H}$ è uno spazio vettoriale di dimensione quattro sui reali, una cui base è data dai quattro elementi

$$1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad j := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad k := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $q \in \mathbf{H}$ abbiamo la scrittura $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dove $a_0 = Re\ q$ si dice la parte reale e $a_1 i + a_2 j + a_3 k = Im\ q$ si dice la parte immaginaria. (La leggera differenza notazionale per Im rispetto ai numeri complessi non ha conseguenze ed è dettata dalla tradizione.) Con le notazioni matriciali introduttive abbiamo $z = a_0 + a_1 i$, $w = a_2 j + a_3 k$, in particolare abbiamo una immersione di corpi $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ data dalla variabile z, che mostra $\mathbf{H}$ come un'estensione di $\mathbf{C}$.

È facile verificare le proprietà

$$ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

in particolare il prodotto in $\mathbf{H}$ non è commutativo.

La coniugata della trasposta tra matrici (che si chiama anche l'hermitiana) lascia invariato 1, mentre cambia segno a i, j, k. Denotiamo con $\overline{q}$ il quaternione corrispondente alla coniugata della trasposta di q. Possiamo quindi scrivere $\overline{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ con le proprietà

$$\overline{\overline{q}} = q$$

$$\overline{q_1}\,\overline{q_2} = \overline{q_2 q_1}$$

$\overline{q}$ si dice il coniugato di q. Il coniugato permette di ricostruire $\mathbf{R}$ a partire da $\mathbf{H}$, precisamente

$$\mathbf{R} = \{q \in \mathbf{H} | \overline{q} = q\}$$

Per ricostruire $\mathbf{C}$ a partire da $\mathbf{H}$ occorre invece scegliere una delle tre unità immaginarie i, j, k. Il coniugato è utile anche per descrivere l'inverso. Infatti è immediato verificare (dalla descrizione matriciale oppure dalle proprietà moltiplicative di i, j, k) che $q\overline{q}$ è un numero reale pari a $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

É naturale denotare $|q| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ come la norma di q, e quindi vale

$$q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2 \qquad q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$$

Esercizio 1.3 *Calcolare ijk e gli altri cinque prodotti che si ottengono permutando gli elementi i, j, k.*

Esercizio 1.4 *Descrivere una base di* $\mathbf{H}$ *come spazio vettoriale su* $\mathbf{C}$.

Esercizio 1.5 *Il centro* $Z(\mathbf{H})$ *è definito come* $\{q \in \mathbf{H} | qp = pq \quad \forall p \in \mathbf{H}\}$. *Provare che* $Z(\mathbf{H}) = \mathbf{R}$.

Esercizio 1.6 *Dimostrare che* $\forall q_1, q_2 \in \mathbf{H}$ *vale*

$$|q_1||q_2| = |q_1 q_2|$$

Esercizio 1.7 *Dimostrare che* $\mathbf{H}$ *è isomorfo all'algebra sui reali generata da* 1 *(unità),* i, j *con la relazione* $(\alpha i + \beta j) \cdot (\alpha i + \beta j) = -\alpha^2 - \beta^2$.
Suggerimento: si ricava $i^2 = j^2 = -1$ *e* $ij = -ji$. *Allora posto* $k = ij, \ldots$ *In generale, dato uno spazio vettoriale* V *generato da* $e_1, \ldots, e_n$ *e una forma quadratica* Q *su* V, *l'algebra sui reali generata da* 1 *(unità),* $e_1, \ldots, e_n$ *con la relazione* $(\sum x_i e_i) \cdot (\sum x_i e_i) = Q(x_1, \ldots, x_n)$ *si dice un'algebra di Clifford.* $\mathbf{H}$ *è un'algebra di Clifford.*

2 I quaternioni e le rotazioni dello spazio

I quaternioni furono "scoperti" da William Hamilton (matematico irlandese, 1805-1865) che intravide la loro utilità in fisica. La loro prima applicazione consiste nella descrizione delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. La terminologia adottata come i, j, k è fatta apposta per favorire questa descrizione, infatti il prodotto tra quaternioni sulla terna i, j, k si comporta esattamente come il prodotto vettoriale.

Denotiamo $\mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{I} =< 1 > \oplus < i, j, k >$ dove $\mathbf{I}$ ha dimensione tre e descrive i quaternioni immaginari. Identificando $\mathbf{I}$ con $\mathbf{R}^3$ possiamo introdurre in $\mathbf{I}$ le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale. Conviene cambiare le notazioni e poniamo $q_n = x_n i + y_n j + z_n k$ $(n = 1, 2)$

$$q_1 \cdot q_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \in \mathbf{R}$$

$$q_1 \wedge q_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) i - (x_1 z_2 - x_2 z_1) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k \in \mathbf{I}$$

Proposizione 2.1 *Siano* $q_1, q_2 \in \mathbf{I}$. *Allora*

$$q_1 q_2 = -q_1 \cdot q_2 + q_1 \wedge q_2 \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{I}$$

Dimostrazione L'enunciato è lineare sia rispetto a q_1 che rispetto a q_2. Basta quindi dimostrarlo quando q_1, q_2 corrispondono ai vettori della base i, j, k e in questo caso è una facile verifica. $\square$

La formula della Prop. 2.1 ha una bellezza intrinseca perché lega il prodotto tra quaternioni, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.

I quaternioni hanno una rappresentazione polare analoga a quella dei numeri complessi. Dato $q \in \mathbf{H}$ tale che $Im\ q \neq 0$, il vettore immaginario $\frac{Imq}{|Imq|}$ ha norma 1 e appartiene alla sfera $S^2 \subset \mathbf{I}$.

Proposizione 2.2 Rappresentazione polare dei quaternioni *Per ogni* $q \in \mathbf{H}$ *tale che* $Im\ q \neq 0$ *esiste* $\theta \in \mathbf{R}, 0 \leq \theta < 2\pi$ *tale che*

$$q = |q| \left[\cos \frac{\theta}{2} + \frac{Im\ q}{|Im\ q|} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

In particolare se $|q| = 1$ *allora*

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \frac{Im\ q}{|Im\ q|} \sin \frac{\theta}{2}$$

Dimostrazione Si può supporre $|q| = 1$. Allora, posto $\alpha = Re\ q$, $\beta = Im\ q$, abbiamo $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = -\overline{\beta}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Basta scegliere θ tale che $\cos \frac{\theta}{2} = \alpha$, $\sin \frac{\theta}{2} = |\beta|$. $\square$

Esercizio 2.3 *Provare che nella rappresentazione polare di* q *e* q^{-1} *appare lo stesso* θ. *Dedurre che l'angolo* θ *non è additivo nella moltiplicazione tra quaternioni, a differenza di quello che accade per i numeri complessi. Nella rappresentazione polare di* $-q$ *appare* $2\pi - \theta$.

Esercizio 2.4 *Sia* $q \in \mathbf{H}$. *Provare che* $q^2 = -|q|^2$ *se e solo se* $q \in \mathbf{I}$.

Esercizio 2.5 *Provare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $q^2 + 1 = 0$ *è omeomorfo alla sfera* S^2. *Invece l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $q^2 - 1 = 0$ *consiste soltanto dei due valori* 1 *e* -1.

Definizione 2.6 *Dato* $q \in \mathbf{H} \setminus \{0\}$, *l'applicazione coniugio* c_q *è definita da*

$$\begin{array}{rccc} c_q\colon & \mathbf{H} & \to & \mathbf{H} \\ & x & \mapsto & q^{-1}xq \end{array}$$

c_q è un'applicazione $\mathbf{R}$-lineare.

Teorema 2.7 Descrizione geometrica del coniugio *Per ogni* $q \in \mathbf{H}\setminus\{0\}$, *l'applicazione coniugio* $c_q\colon \mathbf{R} \oplus \mathbf{I} \to \mathbf{R} \oplus \mathbf{I}$ *conserva la somma diretta, precisamente*

(a) Se $x \in \mathbf{R}$ *allora* $c_q(x) = x$

(b1) Se $x \in \mathbf{I}$ *e* $Im\ q = 0$ *allora* $c_q(x) = x$

(b2) Se $x \in \mathbf{I}$ *e* $Im\ q \neq 0$ *allora* $c_q(x)$ *è la rotazione di un angolo* θ *attorno a* $\frac{Im\ q}{|Im\ q|}$ *nella direzione di* $x \wedge Im\ q$ *(se* i, j, k *terna destrorsa definisce* $\wedge$ *allora il pollice della mano destra nella direzione di* $x \wedge Im\ q$ *definisce il verso della rotazione). In particolare* $c_q(Im\ q) = Im\ q$. *Se* $Re\ q = 0$ *allora* $c_q(x) = x$.

Dimostrazione Si può supporre $|q| = 1$. Cominciamo col dimostrare che $c_q(Im\ q) = Im\ q$, questa uguaglianza vale in tutti i casi. Infatti posto come sopra $\alpha = Re\ q$, $\beta = Im\ q$, abbiamo $q = \alpha + \beta$, $q^{-1} = \overline{q} = \alpha - \beta$. Allora

$$q^{-1}\beta q = (\alpha - \beta)\beta(\alpha + \beta) = \alpha^2\beta - |\beta|^2\alpha + |\beta|^2\alpha - \beta^3 = \alpha^2\beta + |\beta|^2\beta = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\beta = \beta$$

.

(a) e (b1) sono evidenti. Per provare (b2) considero $w \in \mathbf{I}$ tale che $|w|^2 = -w^2 = 1$ e $Re(\beta w) = 0$, cioè w nel piano ortogonale a β.

Allora
$$q^{-1}wq = (\alpha - \beta)w(\alpha + \beta) = \alpha^2 w + \alpha(w\beta - \beta w) - \beta w\beta$$

Dalla Prop. 2.1 segue $w\beta - \beta w = 2w \wedge \beta$. Quindi

$$q^{-1}wq = \cos^2\frac{\theta}{2}w + 2\cos\frac{\theta}{2}w \wedge \beta - \beta \wedge (w \wedge \beta)$$

Chiamiamo $\beta_0 = \frac{Im\ q}{|Im\ q|}$ in modo che $\beta = \sin\frac{\theta}{2}\beta_0$ e $\beta_0 \wedge (w \wedge \beta_0) = w$.

Segue che

$$q^{-1}wq = \cos^2\frac{\theta}{2}w + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}w \wedge \beta_0 - \sin^2\frac{\theta}{2}w = (\cos\theta)w + (\sin\theta)w \wedge \beta_0$$

come volevamo dimostrare. □

Notiamo che il caso (b1) può essere considerato come una rotazione di un angolo zero e quindi come un caso particolare di (b2). In questo caso però l'asse di rotazione non è definito, per questo motivo l'abbiamo trattato a parte.

Lemma 2.8
$$c_{q_2}c_{q_1} = c_{q_1 q_2}$$

Dimostrazione È una verifica immediata. □

Il Teor. 2.7 permette di calcolare facilmente la *composizione di due rotazioni nello spazio*. Nell'esempio seguente sottintendiamo che le rotazioni sono effettuate nel verso prescritto dal Teor. 2.7 (b2).

Example 2.9 *La rotazione di un angolo retto attorno a i è data dalla moltiplicazione per $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. la rotazione di un angolo retto attorno a j è data dalla moltiplicazione per $\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$. La composizione è data dalla moltiplicazione per*

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) = \frac{1}{2} + \frac{i + j + k}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e corrisponde quindi alla rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ attorno a $i + j + k$.

Esercizio 2.10 *Calcolare la composizione tra la rotazione di un angolo retto attorno a j e la rotazione di un angolo retto attorno a i.*

3 Riflessioni rispetto a piani

Sappiamo che ogni rotazione (diretta) nello spazio è composizione di due riflessioni rispetto a due piani (non unici, contenenti l'asse di rotazione). Anche le riflessioni possono essere comprese per mezzo dei quaternioni.

Proposizione 3.1 *Sia q un quaternione immaginario di norma uno. $-c_q$ corrisponde alla riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale a q.*

Dimostrazione La riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale a q è uguale a meno la rotazione di π con asse q (cioè la simmetria rispetto a q). Questo fatto può essere verificato su una terna data da q e da due vettori ortogonali a q. Abbiamo che $q = \cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{q}{|q|} sin(\frac{\pi}{2})$ e quindi la tesi segue dal Teor. 2.7. $\square$

Osservazione Abbiamo ricavato la Prop. 3.1 dal Teor. 2.7, ma è possibile seguire anche il percorso inverso.

Osservazione Siccome q è immaginario di norma uno, abbiamo $q^{-1} = -q = \overline{q}$ e quindi $-c_q(x) = qxq$.

Osservazione La composizione delle riflessioni rispetto agli iperpiani ortogonali a q_1 e q_2 (immaginari di norma uno) è data dalla rotazione $c_{q_1 q_2}$.

Esercizio 3.2 *Provare che data una qualunque isometria $f \in O(3)$ dello spazio euclideo esiste $q \in \mathbf{H}$ di norma unitaria tale che $f = \pm c_q$. Precisamente $f = c_q$ se* $\det\ f = 1$, $f = -c_q$ *se* $\det\ f = -1$.

Esercizio 3.3 *Sia q un quaternione immaginario di norma unitaria. Calcolare la riflessione rispetto alla retta generata da q. Risposta: c_q.*

Esercizio 3.4 *Sia q un quaternione immaginario di norma unitaria. Calcolare le proiezioni ortogonali sull'iperpiano ortogonale a q e sulla retta generata da q. Risposte: $\frac{I-c_q}{2}$ $\frac{I+c_q}{2}$.*

Al vettore immaginario $q = ix_1 + jx_2 + kx_3$ è associata la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{bmatrix}$$

Pertanto QXQ corrisponde alla riflessione del vettore corrispondente a X rispetto a q.

Consideriamo

$$iQ = Qi = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_3 - ix_2 \\ -x_3 + ix_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

e notiamo che iQ è una matrice unitaria con determinante -1 che *non* corrisponde al quaternione iq. (una matrice A si dice unitaria se $A\overline{A}^t = I$.) Infatti iQ non ha la forma

$$\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

Il quaternione $iq = -x_1 - jx_3 + kx_2$ corrisponde a

$$\begin{bmatrix} -x_1 & x_3 + ix_2 \\ -x_3 + ix_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

mentre $qi = -x_1 + jx_3 - kx_2$ corrisponde a

$$\begin{bmatrix} -x_1 & -x_3 - ix_2 \\ x_3 - ix_2 & -x_1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $QXQ = -(iQ)^{-1}X(iQ)$.

4 La fibrazione di Hopf e la rappresentazione spin

Proposizione 4.1 *Siano q_1, q_2 quaternioni di norma uno. Vale $c_{q_1} = c_{q_2}$ se e solo se $q_1 = \pm q_2$*

Dimostrazione È evidente dalla definizione e dal Teor. 2.7. Conviene osservare che ruotare x (ortogonale a q) di un angolo θ verso $x \wedge q$ coincide col ruotarlo di un angolo $-\theta$ verso $x \wedge (-q)$. □

La proposizione precedente permette di comprendere topologicamente il gruppo $SO(3)$.

Infatti consideriamo l'applicazione $S^3 = \{q \in H | |q| = 1\} \xrightarrow{p} SO(3)$ definita da $q \mapsto c_q$. Dalla Prop. 4.1 segue che questa applicazione è 2:1 e la retroimmagine di un elemento è data da due quaternioni uno opposto dell'altro. L'applicazione è suriettiva, infatti è noto che ogni elemento di $SO(3)$ è una rotazione attorno ad un asse (vedi Sernesi, Geometria I). Quindi $SO(3)$ si ottiene quozientando S^3 identificando nel quoziente q e $-q$. p è un omomorfismo di gruppi con nucleo formato da due elementi.

Questo procedimento equivale al modo in cui si ottiene lo spazio proiettivo. Abbiamo quindi

Teorema 4.2 *$SO(3)$ è omeomorfo a $\mathbf{P}(\mathbf{R}^4) = \mathbf{P}^3$*

Il gruppo $SO(3)$ agisce transitivamente sulla sfera $S^2 \subset \mathbf{R}^3$, cioè il "Polo Nord" $N = (1, 0, 0) \in S^2$ viene portato da $SO(3)$ in qualunque altro punto di S^2. Componendo con l'omomorfismo p definito poco sopra, otteniamo un'azione della sfera unitaria dei quaternioni S^3 su S^2, e in particolare un'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}\colon & S^3 & \to & S^2 \\ & q & \mapsto & c_q \cdot (1,0,0) \end{array}$$

che si dice *fibrazione di Hopf.* Le sue fibre sono omeomorfe a S^1.

La sfera S^3 è chiamata anche $Spin(3)$ (gruppo spinore) come sarà spiegato tra poco. Il fatto che la sfera S^3 abbia una struttura di gruppo è notevole. Si può dimostrare che le uniche sfere che ammettono una struttura continua di gruppo sono S^1 e S^3.

Esercizio 4.3 *Dimostrare che $S^3 = \{\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} | |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ coincide con $SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbf{C}) | A\overline{A}^t = I, \ \det\ A = 1\}$*

É interessante considerare un "meridiano" di S^3 che collega ad esempio 1 con -1. Questo può essere definito come l'immagine dell'applicazione

$q(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}$ per $\theta \in [0, 2\pi]$

L'applicazione corrispondente $p(q(\theta)) = c_{q(\theta)}$ è un cammino in $SO(3)$ tale che $p(q(0)) = p(q(2\pi)) = I \in SO(3)$. Il cammino corrisponde semplicemente a ruotare di un angolo θ rispetto allo stesso asse i. Immaginando il cammino come un elastico, non può essere "deformato" in modo continuo ad I (cammino costante), perché altrimenti si potrebbe deformare anche $q(\theta)$ su S^3 che invece ha punti iniziale e finale diversi tra loro. Invece componendo due volte il cammino è possibile deformarlo in modo continuo ad I. Infatti il cammino composto due volte proviene tramite p da un cammino con partenza e arrivo in $1 \in S^3$, tale cammino su S^3 può essere deformato al cammino costante 1, poi basta comporla con p.

Questo fenomeno si esprime col fatto che $SO(3)$ non è semplicemente connesso, il gruppo fondamentale di $SO(3)$ è dato da $\mathbf{Z}_2$, gruppo con due elementi.

Quanto abbiamo visto permette di introdurre la celebre *rappresentazione spin*. Uno spinore è dato da una coppia di numeri complessi

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Ruotando di un angolo θ rispetto ad un asse (ad esempio l'asse i) applichiamo la matrice corrispondente a $q(\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$, che è

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

allo spinore ξ. Dopo la rotazione di 2π otteniamo lo spinore $-\xi$. Questo non dipende dall'asse di rotazione, ad esempio se ruotiamo attorno all'asse j, la matrice corrispondente è

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Otteniamo quindi una applicazione lineare "a due valori". L'ambiguità di segno viene risolta risalendo al gruppo dei quaternioni di norma unitaria S^3 che abbiamo già denotato come $Spin(3)$. Il diagramma che si ottiene è il seguente

$$\begin{tikzcd} Spin(3) \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & \\ SO(3) \arrow[r, dashed] & SU(2) \end{tikzcd}$$

dove la freccia tratteggiata è "a due valori". L'isomorfismo f si dice la rappresentazione spin, introdotta da Lipschitz a fine '800. La rappresentazione spin nel caso del gruppo di Lorentz $O(3,1)$ venne introdotta da Dirac nella sua equazione che descrive l'elettrone in meccanica quantistica (spin dell'elettrone). L'importanza storica di questo passaggio è notevole, da quel momento lo studio delle rappresentazioni dei gruppi è entrato nel bagaglio matematico dei fisici teorici.

Esercizio 4.4 *Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una similitudine tale che $f(0) = 0$. Provare che esiste $q \in \mathbf{H}$ tale che $f(x) = \overline{q}xq$ oppure $f = -\overline{q}xq$. Viceversa $f(x) = \pm\overline{q}xq$ sono similitudini con fattore di scala $|q|^2$. Pertanto il gruppo delle similitudini dirette Sim tali che $f(0) = 0$ è isomorfo ad un quoziente del gruppo moltiplicativo $\mathbf{H} \setminus \{0\}$ con nucleo $\mathbf{Z}_2$.*

5 Dopo i quaternioni?

Sembrerebbe naturale proseguire la catena $\mathbf{R} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ introducendo l'insieme delle matrici

$$\begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \qquad \text{con } z, w \in \mathbf{H} \tag{1}$$

Questa costruzione può essere effettuata, ma con qualche cautela, infatti l'insieme precedente non è chiuso rispetto al prodotto ordinario tra matrici. Il lettore può verificare che il prodotto di due matrici della forma (1) non ha più la forma (1) a causa della non commutatività del prodotto in $\mathbf{H}$, infatti $\overline{q_1}\ \overline{q_2} = \overline{q_2 q_1}$.

Per definire un'algebra occorre una piccola modifica: consideriamo le coppie (z, w) con $z, w \in \mathbf{H}$ dove la somma è definita su ogni componente e il prodotto è definito dalla formula

$$(z, w) \cdot (a, b) := (za - b\overline{w}, zb + \overline{a}w)$$

Con queste definizioni $(1, 0)$ funge da unità, tutti gli elementi non nulli hanno un inverso, valgono le proprietà distributive e la norma $|(z, w)| := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ soddisfa la proprietà

$$|(z, w) \cdot (a, b)| = |(z, w)| \cdot |(a, b)|$$

La "modifica" cha abbiamo introdotto si riconduce all'ordinario prodotto matriciale nel caso commutativo.

L'algebra così ottenuta ha dimensione otto sui reali ed è chiamata l'algebra degli ottetti, introdotta da Cayley e denotata con $\mathbf{O}$. $\mathbf{O}$ non è più associativa, infatti si verifica

$$[(0, i) \cdot (0, j)] \cdot (k, 0) = (-k, 0) \cdot (k, 0) = (1, 0)$$

$$(0, i) \cdot [(0, j) \cdot (k, 0)] = (0, i) \cdot (0, i) = (-1, 0)$$

$\mathbf{O}$ contiene la sottoalgebra $\mathbf{H}$ formata dagli elementi $(z, 0)$.

Il risultato fondamentale in quest'area è che *tutte le algebre sui reali normate e con la possibilità di eseguire la divisione sono isomorfe a una delle quattro:*

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{O}$$

In $\mathbf{O}$ è definito il coniugato $\overline{(z, w)} := (\overline{z}, -w)$

Esercizio 5.1 *Verificare che*

$$\overline{(z, w) \cdot (a, b)} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(z, w)}$$

$$\overline{(z, w)} \cdot (z, w) = (z, w) \cdot \overline{(z, w)} = |(z, w)|^2$$

Le quattro algebre con divisione appaiono in matematica in contesti molto diversi tra loro. Ad esempio corrispondono alle cosiddette quattro varietà di Severi, le uniche varietà proiettive che possono essere proiettate in spazi di dimensione inferiore, oltre a una limitazione che vale per tutte le altre varietà. Queste varietà definiscono dei polinomi di grado tre con la proprietà particolare che il loro gradiente definisce una applicazione quasi ovunque iniettiva (polinomi omaloidali).