Scritto di Geometria I, 4 giugno 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare lineare così definita:

$$f(x, y, z, w) = (x - y, y - z, z - x, 0)$$

a) Trovare la matrice associata a f nella base canonica e la matrice associata a f nella base $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3, e_4\}$
b) Trovare una base di $Ker(f)$, una di $Im(f)$
c) Trovare una base di di $Im(f) + S$ dove $S = \{(0, -s, s, t) |\, t, s \in \mathbf{R}\}$ e trovare un'espressione cartesiana di $Im(f) + S$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare lineare così definita:

$$f(x, y, z, w) = (0, x - y, y - z, z - x)$$

a) Trovare lo spettro di f e dire se f è diagonalizzabile.
b) Trovare lo spettro di f^2 e dire se f^2 è diagonalizzabile.
c) Trovare una funzione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ non diagonalizzabile ma tale che g^2 sia diagonalizzabile.

Esercizio 3.
a) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare; il sottoinsieme dello spazio vettoriale $Hom(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$ definito da $\{h|\ h \text{ lineare } h \circ f(e_1) = e_1\}$ è un sottospazio ?
b) Sia $M(n \times n)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$. Il sottoinsieme $\{A \in M(n \times n) | A \text{ è diagonalizzabile}\}$ è un sottospazio ?
c) Sia $P_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Il sottoinsieme $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2[x] | a_1^2 + a_2 = 0\}$ è un sottospazio ?
d) Sia $\mathbf{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali. Il sottoinsieme $\{p \in \mathbf{R}[x] | p(1)^2 + p(2)^2 = 0\}$ è un sottospazio ?

Esercizio 4. Siano x, y, z numeri reali e sia n un numero naturale. Calcolare (in funzione eventualmente di x, y, z, n) il rango delle seguenti matrici rispettivamente 5×5, 5×5, $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} x & z & 0 & . & . & . & . & 0 \\ y & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & z \\ 0 & . & . & . & . & 0 & y & x \end{pmatrix}$$

(cioè C è la matrice con tutti x sulla diagonale tutti y sulla sottodiagonale, tutti z sulla sopradiagonale e 0 altrove).

Scritto di Geometria II, 4 giugno 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. a) Sia

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & a \\ a-2 & -a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Trovare la segnatura della forma bilineare $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita dalla matrice A_0 e di quella definita dalla matrice A_1.
b) Discutere al variare del parametro reale a la segnatura della forma bilineare $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita dalla matrice A_a.

Esercizio 2. Consideriamo nel piano euclideo i punti $P_1 = (2,1)$ e $P_2 = (1,2)$. Al variare di $t \in \mathbf{R}$ denotiamo con C_t il luogo dei punti P tali che $d(P, P_1) + d(P, P_2) = t$
a) Si trovi per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ C_t è non vuoto e per quali valori C_t è un'ellisse reale.
b) Si calcoli l'eccentricità di C_t quando il termine ha significato.
c) Si trovino le equazioni delle due tangenti negli estremi del diametro di C_t passante per P_1 e P_2.

Esercizio 3. Consideriamo il sottospazio affine di $\mathbf{R}^4$ definito da $W = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, x_4 = 0\}$.
a) Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine su W.
b) Si trovino equazioni parametriche per il sottospazio affine S (di dimensione due) ortogonale a W e passante per $(1,1,1,1)$.
c) si trovi $W \cap S$.

Esercizio 4. Nel piano complesso con coordinata $z = x + iy$ si consideri la funzione $f(z) = iz + 1$.
a) Si determini il luogo dei punti fissi di f e si descriva geometricamente f. In particolare f è una isometria, una similitudine ?
b) Si prenda adesso la funzione $g(z) = 2iz + 2$. Si determini il luogo dei punti fissi di g e si descriva geometricamente g. In particolare g è una isometria, una similitudine ?
c) Se $C = \{(x,y) | x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ si descriva $f(C)$ e $g(C)$.