Prova di esonero di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 9/1/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Fila I

Esercizio 1. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$T(a, b, c, d) = (b, c, d, 0)$$

i) Si determini la matrice A di T rispetto alla base canonica.
ii) Si determini la matrice B di T rispetto alla base $\{e_1 + e_2, e_2, e_3, e_4\}$
iii) Si calcoli determinante e traccia di B.
iv) Si determini un numero naturale n tale che $T^n = 0$.

Esercizio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare lo spettro di A.
2) Dire se A é diagonalizzabile.
3) In caso affermativo calcolare una base di autovettori di A.

Esercizio 3. Sia A una matrice 3×3 tale che $A^7 = -{}^t(A^7)$. Dimostrare che A non é invertibile.

Esercizio 4. Siano A e B due matrici simmetriche reali $n \times n$. La matrice A abbia un solo autovalore. Dimostrare che esiste Q ortogonale $n \times n$ tale che ${}^tQAQ$ e ${}^tQBQ$ siano diagonali. Nel caso in cui n=2,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

calcolare una tale Q.

Prova di esonero di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 9/1/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Fila II

Esercizio 1. Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$T(a, b, c, d) = (0, a, b, c)$$

i) Si determini la matrice A di T rispetto alla base canonica.
ii) Si determini la matrice B di T rispetto alla base $\{e_1 + e_2, e_2, e_3, e_4\}$
iii) Si calcoli determinante e traccia di B.
iv) Si determini un numero naturale n tale che $T^n = 0$.

Esercizio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare lo spettro di A.
2) Dire se A é diagonalizzabile.
3) In caso affermativo calcolare una base di autovettori di A.

Esercizio 3. Sia A una matrice 7×7 tale che $A^3 = -{}^t(A^3)$. Dimostrare che A non é invertibile.

Esercizio 4. Siano A e B due matrici simmetriche reali $n \times n$. La matrice A abbia un solo autovalore. Dimostrare che esiste Q ortogonale $n \times n$ tale che QAQ^{-1} e QBQ^{-1} siano diagonali. Nel caso in cui n=2,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare una tale Q.