Scritto di Geometria I, 10.9.03
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali (motivare le risposte). Nei casi affermativi calcolare anche la dimensione.
(a) $\{A \in M(4 \times 4) | A^t A = I\}$
(b) $\{A \in M(4 \times 4) | A^t A = 0\}$
(c) $\{f \in \mathbf{R}[x]_{\leq 3} | f(1) + f(2) = 0\}$
(d) $\{v \in \mathbf{R}^n | (v, e_1) + (v, e_2) = 0\}$ (v, e_1) indica il prodotto scalare tra v e il primo vettore della base canonica e_1.

Esercizio 2. a) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 9 & 11 & 11 & 11 \\ 8 & 8 & 12 & 12 \\ 7 & 7 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Calcolare il determinante di A e di A^{10}.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice quadrata $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono numeri reali tali che $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
(a) Provare che 1 è un autovalore di A (suggerimento: si cerchi un opportuno autovettore di A^t).
(b) Provare che 0 e 1 sono gli unici autovalori di A.
(c) A é diagonalizzabile?

Esercizio 4. Sia $Ax = b$ un sistema lineare.
(a) Se x_1, x_2, x_3 sono soluzioni del sistema, provare che $x_1 + x_2 - x_3$ è ancora soluzione.
(b) Se x_1, x_2, x_3 sono soluzioni linearmente indipendenti del sistema, provare che esistono due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato $Ax = 0$.
(c) Nel caso in cui $b = 0$ e A é la matrice 4×4 tale che $a_{ij} = i - j$ si trovi una base delle soluzioni del sistema.

Notazioni: $M(4 \times 4)$ è lo spazio vettoriale delle matrici 4×4 a coefficienti reali. $\mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata di grado ≤ 3.

Scritto di Geometria II, 10.9.03
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia C la conica $2x^2 + 2xy + 2y^2 + tx + 1 = 0$.
(a) Trovare per quali valori di t si tratta di un'ellisse reale.
(b) Per i valori di t calcolati nel punto (a), calcolare l'area interna a C.

Esercizio 2. Siano $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C_t = (t, t + 1, 3)$ al variare del parametro reale t..
(a) Si trovi la distanza tra la retta passante per A e B e la retta descritta da C_t.
(b) Calcolare per quali valori di t l'area del triangolo di vertici A, B e C_t è minima.

Esercizio 3. Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le usuali coordinate nel piano euclideo $\mathbf{A}^2$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e sia $f(x) = Ax + c$ una funzione del piano in sè.
(a) Provare che f è un'isometria.
(b) Calcolare $Fix(f)$, classificare f e descriverla geometricamente in modo dettagliato.

Esercizio 4. Ogni proiettività f di $\mathbf{P}^1$ è descritta in coordinate da una matrice invertibile 2×2 A definita a meno di una costante moltiplicativa non nulla.
(a) provare che i punti fissi di f corrispondono agli autovettori di A.
(b) provare che una proiettività di $\mathbf{P}^1$ con tre punti fissi è l'identità.
(c) esistono proiettività di $\mathbf{P}^1$ senza punti fissi ?