Scritto di Geometria 1, a.a. 2003-2004, 14 luglio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

MOTIVARE LE RISPOSTE

Esercizio 1. 1) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$f(x, y, z, w) = (w, z, y, x)$$

Trovare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dove $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3, e_4\}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica.
2) Trovare una base di $I := Imf|_{\langle e_1+e_2, e_2+e_3\rangle}$ e una base di $I + Z$ dove

$$Z = \{(x, y, z, w) |\ y = z + w = 0\}$$

3) Trovare un sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3 tale che $f(W) = W$.

Esercizio 2. 1) Dire se le seguente matrici sono diagonalizzabili

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sia D una matrice diagonale $n \times n$. Discutere al variare di k e D la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$M_{D,k} = \begin{pmatrix} D & kD \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia A una matrice $n \times n$ fissata.
1) Calcolare il rango e il determinante della seguente matrice in funzione di $rk(A)$, $det(A)$, n e dei parametri reali t, s, p.

$$M_{t,s,p} = \begin{pmatrix} tA & sA \\ pA & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sia A una matrice $n \times n$ fissata. Dire se $\{M_{t,s,p} |\ t, s, p \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale delle matrici $2n \times 2n$ ed eventualmente dire che dimensione ha e trovare una base.
3) Sia A una matrice $n \times n$ fissata. Dire se $\{M_{t,s,p} |\ t, s, p \in \mathbf{R},\ \ rk(M_{t,s,p}) = rk(A)\}$ è un sottospazio vettoriale delle matrici $2n \times 2n$ ed eventualmente dire che dimensione ha.

Scritto di Geometria 2, a.a. 2003-2004, 14 luglio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

MOTIVARE LE RISPOSTE

Esercizio 1. Nello spazio euclideo A^3 con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ siano

$$\pi = \{(x, y, z)|\ x - y = 2\}$$

$$\sigma = \{(x, y, z)|\ x + y = 1\}$$

i) Trovare un'espressione parametrica di π e un'espressione parametrica e una cartesiana di $l = \pi \cap \sigma$.
ii) Trovare un piano contenente l e il punto $(1, 2, 3)$
iii) Trovare, se esiste, una retta contenuta in σ, perpendicolare a π e avente distanza $\sqrt{3/2}$ da $P = (0, 0, 1)$

Esercizio 2. Consideriamo nel piano euclideo A^2 con riferimento cartesiano ortogonale Oxy la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8 = 0$$

i) trovare i fuochi di $\mathcal{C}$.
ii) calcolare i valori del parametro reale r tali che la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

sia tangente a $\mathcal{C}$ e trovare i corrispondenti punti di tangenza (si suggerisce di costruire il disegno). *Si ricorda che due coniche nonsingolari si dicono tangenti in un punto comune P se le loro tangenti in P coincidono*
iii) trovare le rette tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti trovati al paragrafo precedente.

Esercizio 3.
Consideriamo nel piano euclideo con riferimento cartesiano ortogonale Oxy i sottoinsiemi

$$Q_0 = \{(x, y)|\ |x| + |y| \le 1\}$$

$$Q_1 = \{(x, y)|\ |x - \frac{1}{2}| + |y - \frac{1}{2}| \le 1\}$$

i) trovare tutte le isometrie f del piano tali che $f(Q_0) = Q_0$ (non è necessario scrivere le equazioni, è sufficiente descriverle geometricamente).
ii) calcolare l'area di $Q_0 \cup Q_1$.
iii) calcolare quante sono le isometrie f del piano tali che $f(Q_0) = Q_1$.