Prima prova di esonero

Geometria 2, C.d.L. Matematica

16 aprile 2008

Esercizio 1. Si consideri nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ il piano π di equazione $2\,x + y - z + 1 = 0$, e il punto $P = (1, 0, 0)$.

a) Calcolare il simmetrico P' di P rispetto al piano π.

b) Calcolare la distanza tra i punti P e P'.

c) Calcolare la distanza dell'origine dalla retta r passante per i punti P e P'.

Esercizio 2. Siano r, s rette parallele e distinte nel piano $\mathbb{A}^2$.

a) Determinare le isometrie $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tali che $f(r) = r$, $f(s) = s$.

b) Sia $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una affinità tale che $f(r) = r$ e $f(s) = s$. Dimostrare che allora vale $f(t) = t$, dove t è la retta media di r ed s (cioè la retta parallela ad r, s ed equidistante da r ed s).

c) Supponiamo che r ed s abbiano equazioni rispettivamente $x = 0$ e $x = 1$. Caratterizzare le matrici associate alle affinità $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tali che $f(r \cup s) = r \cup s$.

Soluzione. Cominciamo studiando in generale le affinità tali che $f(r \cup s) = r \cup s$. Possiamo scegliere un sistema di riferimento ortogonale in modo tale che le due rette r ed s abbiano equazioni $x = 0$ e $x = d$ per qualche $d \in \mathbb{R}$. Data una affinità f, sia

$$f(P) = A\,P + b, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

la forma analitica di f nel sistema di coordinate scelto. Abbiamo due possibilità, a seconda che f scambi le rette r ed s tra loro oppure no. Consideriamo prima il caso in cui si ha $f(r) = r$ e $f(s) = s$. Dato che una affinità preserva il parallelismo, le tre condizioni

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in r, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r, \qquad f\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \in s$$

sono sufficienti per imporre che f trasformi in sé sia la retta r che la retta s. Esplicitando le relazioni precedenti troviamo

$$b_1 = 0, \qquad a_{11} = 1, \qquad a_{12} = 0,$$

da qui segue che f è della forma

$$f(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove a_{22} è diverso da 0.

Se invece $f(r) = s$ e $f(s) = r$, ragionando nello stesso modo troviamo

$$f(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} d \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

e anche in questo caso a_{22} deve essere non nullo.

a) *Metodo analitico:* Da quanto abbiamo già detto f deve essere della forma 1. Inoltre, poiché f è una isometria, abbiamo che A è una matrice ortogonale e quindi che $a_{21} = 0$ e $a_{22} = \pm 1$. Se $a_{22} = 1$, f è una traslazione. Altrimenti f è una riflessione.

   Metodo sintetico: Dimostriamo che f deve essere una traslazione (eventualmente l'identità) nella direzione delle rette r ed s oppure una riflessione rispetto ad una retta perpendicolare ad r ed s. Ricordiamo che le isometrie di una retta sono di due tipi: le traslazioni e le riflessioni rispetto ad un punto. Supponiamo che f ristretta ad r agisca come una traslazione τ_v. Dimostriamo che in questo caso anche f ristretta ad s agisce come τ_v. Preso un punto P su s, e detta P' la sua proiezione su r, abbiamo $f(P') = P' + v$ e la retta $f(P)f(P')$ è perpendicolare alla retta r dato che la retta PP' è perpendicolare ad r e le isometrie mantengono gli angoli. Qundi i punti P, P', $f(P)$, $f(P')$ sono i vertici di un rettangolo e perciò $f(P) - P = f(P') - P' = v$, ovvero, $f(P) = P + v$ come volevamo. Poiché f e τ_v coincidono su tre punti indipendenti (ad esempio due punti presi su r e un terzo preso su s), abbiamo che f e τ_v sono uguali.

   Resta il caso in cui f ristretta ad r agisce come una riflessione σ_a rispetto ad una retta a perpendicolare ad r ed s. Procedendo come nel caso precedente, si dimostra che anche f ristretta ad s agisce come σ_a e allo stesso modo si conclude che allora $f = \sigma_a$.

b) *Metodo analitico:* I punti della retta t hanno coordinate $(d/2, p)$ al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$. Usando per f l'espressione 1 troviamo

$$f\begin{pmatrix} d/2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/2 \\ (d/2)\, a_{21} + p\, a_{22} + b_2 \end{pmatrix}$$

   e quindi che $f(t) = t$.

   Metodo sintetico: Dal teorema di Talete segue che la retta t è il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti aventi un estremo su r e l'altro su s. Sia P un punto di t e siano P_1, P_2 due punti scelti rispettivamente uno su r e l'altro su s, in modo tale che P sia il punto medio di P_1 e P_2 (ad esempio prendendo le due proiezioni di P su r e su s). Poiché le affinità conservano i punti medi, $f(P)$ è il punto medio di $f(P_1) \in r$ e $f(P_2) \in s$ e quindi appartiene a t.

c) Dal calcolo fatto all'inizio, ponendo $d = 1$, abbiamo che f deve essere di una di queste due forme

$$\begin{aligned} f_1(P) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \\ f_2(P) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   dove a_{21}, a_{22}, b_2, sono tre parametri con $a_{22} \neq 0$.