Compitino di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 23/11/2001
Laurea in Matematica, Università di Firenze
Fila I

Esercizio 1. Sia S il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^3$:

$$S =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

a) Dire se $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$
b) Trovare una forma cartesiana di S
c) Trovare una base di $S \cap Im(f_A)$ dove $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è l'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V.
a) Calcolare la dimensione di $< v_1 + v_2, v_2, v_3 + v_2 >$
b) Calcolare la dimensione di $< 3v_1 + 3v_2, v_2 + v_1, v_3 >$
c) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_4$, $f(v_1 - v_2) = v_4$, $f(v_1) = v_3$? Motivare la risposta.
d) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_4$, $f(v_1) = v_3$? Motivare la risposta.

Esercizio 3. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$.Dire se i seguenti insiemi sono degli spazi vettoriali e se sì calcolarne la dimensione:
a) $\{v \in \mathbf{R}^n | v \cdot e_1 = 0\}$
b) $\{v \in \mathbf{R}^n || v| = 1\}$
c) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) | \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
d) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) | \ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Esercizio 4. Consideriamo in $\mathbf{R}^3$ i vettori $v = (1, 1, 1)$, $w_1 = (2, 3, 0)$, $w_2 = (3, 0, 4)$, $w_3 = w_1 + w_2$.
a) Ordinare in modo crescente gli angoli $\widehat{vw_1}$, $\widehat{vw_2}$, $\widehat{vw_3}$.
b) Trovare una base ortonormale di $W =< w_1, w_2 >$.
c) Completare la base trovata nel punto b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Compitino di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 23/11/2001
Laurea in Matematica, Università di Firenze
Fila II

Esercizio 1. Sia S il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^3$:

$$S = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

a) Dire se $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$
b) Trovare una forma cartesiana di S
c) Trovare una base di $S \cap Im(f_A)$ dove $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è l'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V.
a) Calcolare la dimensione di $< v_1 - v_2, v_2, v_3 + v_2 >$
b) Calcolare la dimensione di $< 3v_1 + 3v_2, v_2 + v_1, v_3 >$
c) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_3$, $f(v_1 - v_2) = v_3$, $f(v_1) = v_4$? Motivare la risposta.
d) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_3$, $f(v_1) = v_4$? Motivare la risposta.

Esercizio 3. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$.Dire se i seguenti insiemi sono degli spazi vettoriali e se sì calcolarne la dimensione:
a) $\{v \in \mathbf{R}^n | 2 \cdot e_n = 0\}$
b) $\{v \in \mathbf{R}^n | |v| = 2\}$
c) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) |\ A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
d) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) |\ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Esercizio 4. Consideriamo in $\mathbf{R}^3$ i vettori $v = (1,1,1)$, $w_1 = (1,2,0)$, $w_2 = (3,0,4)$, $w_3 = w_1 + w_2$.
a) Ordinare in modo crescente gli angoli $\widehat{vw_1}$, $\widehat{vw_2}$, $\widehat{vw_3}$.
b) Trovare una base ortonormale di $W = < w_1, w_2 >$.
c) Completare la base trovata nel punto b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Compitino di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 23/11/2001
Laurea in Matematica, Università di Firenze
Fila III

Esercizio 1. Sia S il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^3$:

$$S = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

a) Dire se $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$
b) Trovare una forma cartesiana di S
c) Trovare una base di $S \cap Im(f_A)$ dove $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è l'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V.
a) Calcolare la dimensione di $< v_1 + v_2, v_2, v_3 - v_2 >$
b) Calcolare la dimensione di $< 3v_1 + 3v_2, v_2 + v_1, v_3 >$
c) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_4 + v_3$, $f(v_1 - v_2) = v_4 + v_3$, $f(v_1) = v_3$? Motivare la risposta.
d) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_3 + v_4$, $f(v_1) = v_3$? Motivare la risposta.

Esercizio 3. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$.Dire se i seguenti insiemi sono degli spazi vettoriali e se sì calcolarne la dimensione:
a) $\{v \in \mathbf{R}^n | v \cdot e_n = 0\}$
b) $\{v \in \mathbf{R}^n || v| = 3\}$
c) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) | \ A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
d) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) | \ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Esercizio 4. Consideriamo in $\mathbf{R}^3$ i vettori $v = (1, 1, 1)$, $w_1 = (5, 3, 0)$, $w_2 = (3, 0, 4)$, $w_3 = w_1 + w_2$.
a) Ordinare in modo crescente gli angoli $\widehat{vw_1}$, $\widehat{vw_2}$, $\widehat{vw_3}$.
b) Trovare una base ortonormale di $W =< w_1, w_2 >$.
c) Completare la base trovata nel punto b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Compitino di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 23/11/2001
Laurea in Matematica, Università di Firenze
Fila IV

Esercizio 1. Sia S il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^3$:

$$S = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

a) Dire se $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$
b) Trovare una forma cartesiana di S
c) Trovare una base di $S \cap Im(f_A)$ dove $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è l'applicazione associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V.
a) Calcolare la dimensione di $< v_1 - v_2, v_2, v_3 - v_2 >$
b) Calcolare la dimensione di $< 3v_1 + 3v_2, v_2 + v_1, v_3 >$
c) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_4$, $f(v_1 - v_2) = v_4$, $f(v_1) = v_3 + v_4$? Motivare la risposta.
d) Esiste un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(v_1 + v_2) = v_4$, $f(v_1) = v_2$? Motivare la risposta.

Esercizio 3. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$.Dire se i seguenti insiemi sono degli spazi vettoriali e se sì calcolarne la dimensione:
a) $\{v \in \mathbf{R}^n | 2v \cdot e_1 = 0\}$
b) $\{v \in \mathbf{R}^n || v| = 4\}$
c) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) |\ A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
d) $\{A \in M(2 \times 2, \mathbf{R}) |\ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Esercizio 4. Consideriamo in $\mathbf{R}^3$ i vettori $v = (1, 1, 1)$, $w_1 = (2, 3, 0)$, $w_2 = (3, 0, 6)$, $w_3 = w_1 + w_2$.
a) Ordinare in modo crescente gli angoli $\widehat{vw_1}$, $\widehat{vw_2}$, $\widehat{vw_3}$.
b) Trovare una base ortonormale di $W = < w_1, w_2 >$.
c) Completare la base trovata nel punto b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.