Fiesole, luglio 2007.

Caro Giorgio,

ti trasmetto alcune fotocopie di compiti ed esercitazioni di Matematica e Informatica effettuati dai miei alunni della classe II G e da alcuni di quelli della classe II E della Scuola Media di Compiobbi. Ti scrivo anche queste pagine di spiegazione sui motivi per cui ho scelto di proporre certi argomenti, a fianco di quelli proposti dai programmi ministeriali, agli alunni di seconda media. Cerco inoltre di descriverti le difficoltà che ho incontrato e, soprattutto, i vantaggi che a mio parere ci sono nell'anticipare ai preadolescenti la presentazione di concetti e strumenti matematici di solito proposti a studenti di fasce d'età più avanzate. Premetto che già nella Scuola Media di Vinci avevo tentato un'operazione del genere ma, a causa di fattori ambientali di vario genere, ero riuscito ad effettuarla con successo, e fuori dall'orario curriculare, solo con alunni di origine cinese, magrebina e albanese che, di fatto, nella Scuola Italiana sono considerati carne da macello

Vengo ora all'elenco degli argomenti extracurricolari svolti:

1. Le equazioni di primo e di secondo grado.

Nei programmi di seconda media le equazioni non sono previste tuttavia uno è tenuto a spiegare le proporzioni. Nei testi di aritmetica queste vengono definite come l'uguaglianza di due rapporti, ad esempio:

$$6:3=14:7,$$

che si legge *"6 sta a 3 come 14 sta a 7"*, dove 6 e 7 sono detti *estremi* mentre 3 e 14 sono detti *medi*, con ovvio significato dei termini. Dopo la definizione viene enunciata, in italiano, la *"proprietà fondamentale delle proporzioni"* che recita: *"il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi"*. A questo punto i testi sostituiscono a uno dei medi o degli estremi la lettera $x$, detta *incognita*, ed enunciano la procedura risolutiva: *"Per calcolare un medio (risp. un estremo) incognito occorre moltiplicare fra loro gli estremi (risp. i medi) e dividere il risultato per il medio (risp. l'estremo) conosciuto"*. Non c'è dubbio che si tratta di un metodo ingegnoso che, mischiando un po' di aritmetica e un po' di filastrocche, fornisce agli alunni un algoritmo per risolvere semplici problemi, algoritmo che funziona anche se non lo hanno capito[1]. Si pone a questo punto un grosso problema: gli alunni sono capaci di calcolare l'incognita $x$, ma non riescono a risolvere alcuni esercizi (detti "problemi del tre composto") che i testi propongono in coda al capitolo sulle proporzioni. Quando invece gli esercizi sono abbordabili (e sono detti "problemi del tre semplice"), allora si possono risolvere per via assolutamente elementare senza l'ausilio delle proporzioni. Di fatto risolvere una proporzione significa risolvere un'equazione di primo grado del tipo

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$$

e questo è stato il motivo per il quale ho deciso di anticipare alla seconda media le equazioni di primo grado, che fanno parte del programma di algebra dell'anno successivo. E anche in terza media sono difficili da spiegare[2]. Anni fa lessi un libro di Richard Feynman in cui lui racconta di quando era alle elementari e assisteva suo cugino di tre anni più grande mentre costui studiava algebra e cercava di risolvere l'equazione $2x+7=15$. Feynman si rese conto che il risultato era 4, nonché di alcune altre cose, infatti scrisse:

"*Capii che il problema era trovare x; in che modo non aveva importanza. Per me una cosa come farlo con l'algebra o farlo con l'aritmetica non esisteva proprio. L'algebra era allora un insieme di regole che, seguite meccanicamente, potevano dare la soluzione. Cose tipo togli 7 al primo membro e al secondo membro, se c'è un coefficiente di x dividi per quel coefficiente ambo i membri e così via: una serie di passi con cui si arrivava alla risposta rinunciando a capire cosa si stesse facendo. Le regole sono state inventate perché i poveri tapini che devono studiare algebra possano tutti cavarsela. Ecco perché mio cugino non l'ha mai imparata.*"[3]

[1] Non si vede come possano capirlo, visto che non vengono fornite dimostrazioni di sorta. D'altra parte i testi delle medie non forniscono quasi mai dimostrazioni.

[2] Ci credo che sono difficili da spiegare: qualche gran genio ha deciso di metterle nei programmi ministeriali dopo i monomi e il calcolo polinomiale e i testi le espongono di conseguenza. Siccome gli alunni hanno grande difficoltà col calcolo simbolico, non possono capire le equazioni.

[3] R. P. Feynman *Il Piacere di Scoprire* Adelphi, (2002), pagg. 24, 25.

Nella mia esperienza d'insegnante ho sempre sottolineato il fatto che lo scopo è "trovare $x$", ma mi sono sempre impantanato sulle regole perché invariabilmente queste si trasformavano nel fine quando invece sono il mezzo. Quest'anno ho capito che, invece di fornire regole, dovevo attaccarmi a quello che gli alunni avevano imparato alla scuola elementare, ossia le cosiddette "riprove": se 8-3=5 allora 8=5+3 e viceversa; se 6:3=2 allora 6=3·2 e viceversa. In questo modo gli alunni hanno accettato, con naturalezza senza batter ciglio, che se $x$-3=5 allora $x$=5+3 e viceversa, e che se $x$:3=2 allora $x$=3·2 e viceversa, qualunque cosa sia, o voglia dire, la lettera $x$. Hanno protestato quando ho cercato di far loro sostituire $\frac{8}{4}$ a 8:4, allora ho accettato il compromesso 8/4 e, in un secondo tempo, ho fatto loro ingoiare anche la frazione. Con grande rapidità hanno digerito e automatizzato il trasporto da un membro all'altro di una quantità e l'eliminazione del coefficiente di $x$. In tal modo tutti e ventidue sono stati in grado di risolvere $2x+7=15$. Il primo problema in cui mi sono imbattuto è stato il calcolo di quantità del tipo $7x+5x$. Nell'ambito dell'algebra proposta in terza media $7x+5x$ è la somma di due monomi simili e la regola dice che il risultato è $(7+5)x=12x$, ma questo presuppone la definizione di monomio, quella di monomi simili e quella di somma di monomi simili. Una struttura piuttosto pesante per spiegare il fatto che 7mele+5mele=12mele. Basterebbe far osservare che se si pone $x$=mele, si arriva al risultato senza bisogno di starci a pensare. Il secondo problema è stato quello di introdurre i coefficienti razionali. Gli alunni arrivavano senza difficoltà a scritture del tipo

$$\frac{6}{5}x = \frac{42}{35}$$

ma alcuni avevano ancora difficoltà ad applicare la procedura, che era per loro automatica coi numeri naturali. Tuttavia è bastato far loro osservare che è sufficiente porre $A=\frac{6}{5}$ e $B=\frac{42}{35}$, sostituirli nell'equazione, ottenere $x=\frac{B}{A}$, risostituire e calcolare il risultato. Tutto questo l'ho spiegato in 6 ore di lezione; poi ho impiegato una settimana ad assegnare problemi da risolvere mediante un'equazione di primo grado, dapprima guidando gli alunni alla lavagna e poi lasciandoli lavorare in modo autonomo. Fra questi esercizi alcuni si traducevano nell'uguaglianza di due rapporti con un termine incognito, cioè in una proporzione[4] e gli alunni li hanno risolti senza difficoltà. Considerata la velocità con cui la classe si era impadronita delle tecniche necessarie ad affrontare con successo questi semplici problemi ho deciso di introdurre le equazioni di secondo grado. Mi ero infatti reso conto che gli alunni padroneggiavano alcuni dei prerequisiti per affrontarle. Innanzitutto in prima media erano stati costretti a risolvere espressioni numeriche piuttosto bizantine come puoi renderti conto sfogliando un qualsiasi testo scolastico scelto a caso. In secondo luogo, all'inizio dell'anno, avevo spiegato loro la radice quadrata insistendo sul fatto che tale radice è l'inverso della potenza con esponente 2 per cui non è stato un problema far loro accettare che $\sqrt{a^2} = a$ e che $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ per ogni $a$ naturale, razionale o reale che sia. Naturalmente, durante la spiegazione della radice quadrata, ho introdotto senza incontrare nessuna difficoltà i numeri con segno (cioè l'insieme **Z**), in quanto ritengo necessario che un alunno sappia da subito che non è possibile estrarre la radice di un numero negativo[5]. Infine, durante la prima parte del corso d'informatica, avevo insegnato come usare il foglio elettronico Microsoft Excel per disegnare i grafici di semplici funzioni, insistendo soprattutto sulle parabole, su come possono essere messe nel piano[6], sulle loro intersezioni con gli assi e sulle coordinate di tali intersezioni. Quel che mi mancava era un po' di semplice calcolo simbolico. Evitando di parlare di monomi e di monomi simili, in modo informale ho presentato, fatto digerire e automatizzare alla classe le seguenti uguaglianze:

$$a(b+c)=ab+ac;$$ [7]

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd;$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Con un po' di esercizi mirati ho messo gli alunni in grado di ricavarsi da soli i cosiddetti prodotti notevoli (quadrati e cubi di binomi). In questo modo sono velocemente arrivato a definire la forma generale di un'equazione di secondo grado, a dare la descrizione delle due soluzioni e a mostrare per sostituzione formale che sono effettivamente soluzioni. La maggior parte degli studenti (19 su 22) è stata subito in grado di risolvere qualsiasi equazione numerica[8]. Non è stato

---

[4] Uno di questi è interessante "*La terra è un ellissoide il cui raggio equatoriale misura 6378,16 Km e il cui raggio polare misura 6356,776 Km. Calcolate di quanto sarebbe più corto il raggio polare di quello equatoriale in un mappamondo in cui quest'ultimo misura 1 m*". Me l'hanno risolto: la risposta è 3,35 mm. E da qui si capisce bene che la terra è un ellissoide che somiglia parecchio a una palla.

[5] Uno dei fatti più sconcertanti della scuola italiana è che i numeri interi (detti *numeri con segno* o *numeri relativi*) sono introdotti solo in terza media, quando è noto che un bambino dei primi anni delle elementari li capirebbe subito e sarebbe in grado di svolgere le quattro operazioni con essi.

[6] Da anni mi sono reso conto che non è il caso di usare termini complicati come convessità o concavità. Meglio dire che se sul piano piove una parabola può riempirsi d'acqua oppure farsela scivolare sopra. Infatti è noto che le parabole sono impermeabili.

[7] Ho insistito molto sul fatto del tutto ovvio che questa può essere vista come $ab+ac=a(b+c)$. In tal modo si può arrivare a portare gli alunni al raccoglimento a fattor comune senza parlare di MCD di due o più monomi. Se ci pensi sopra ti rendi conto che si tratta di un fatto naturale.

[8] Già prima di dare la forma generale dell'equazione avevo proposto alla classe alcune equazioni di secondo grado con soluzioni molto semplici (1 e 2 oppure 2 e 3) da risolvere a occhio. Avevo anche assegnato, in modo criminale, $x^2-x-1=0$ (della quale mi sono poi

poi un problema assegnare semplici problemi che si risolvono scrivendo l'equazione associata e, soprattutto, grazie al lavoro svolto con Excel, far calcolare le ascisse dei punti d'intersezione di una parabola coll'asse orizzontale[9].

2. <u>Il calcolo monomiale e polinomiale</u>.

Monomi e polinomi vengono presentati in terza media e, nella mia esperienza, gli alunni incontrano varie difficoltà nell'affrontarli. Alcune di esse derivano dalla scarsa qualità dei libri di testo e altre dalla forma mentale di molti degli insegnanti (me compreso). A mio parere i motivi di tutte le difficoltà risiedono nella ridondanza delle definizioni che vengono date, dal gran numero delle regole da applicare, dalla scarsa chiarezza di alcuni dei termini usati e, soprattutto, dall'assenza di qualsiasi spiegazione sul fondamento del formalismo usato. Uno che vede i monomi per la prima volta non può rendersi conto, ad esempio, perché due monomi sono *simili* se hanno la stessa parte letterale. Perché, infatti, non sono simili se hanno gli stessi coefficienti? Oppure, perché non sono simili se hanno le stesse lettere ma esponenti diversi? Gli alunni apprendono la regola che la somma di due monomi simili è un terzo monomio simile ai precedenti, che ha quindi la medesima parte letterale e, per coefficiente, la somma dei coefficienti. In questo modo, a mio parere, molti alunni si limitano a imparare definizioni e filastrocche e le regole, come al solito, diventano il fine e non il mezzo. Nel caso dei monomi la situazione è particolarmente complessa perché sono formati da numeri (i coefficienti), che si comportano da numeri. Però ci sono altri numeri (gli esponenti), che si comportano in modo strano perché si sommano quando dovrebbero moltiplicarsi, si sottraggono quando dovrebbero dividersi e si moltiplicano quando ci sono di mezzo due potenze. Infine contengono le lettere, che stanno lì senza dar noia, ma non si capisce che senso abbiano. Si tratta allora di trovare un modo naturale di rimettere tutto assieme. L'idea iniziale mi è venuta dalla mia esperienza d'insegnamento dell'algebra ai cinesi di Vinci. Devi sapere che i ragazzi cinesi immigrati dopo che hanno fatto le elementari nel loro paese d'origine hanno stupefacenti capacità di calcolo derivanti dal modo brillante in cui in Cina s'insegnano le tabelline[10]. Il fatto è che, di fronte al calcolo monomiale, i cinesi crollano. Io credo d'aver capito la radice di questa loro difficoltà. Infatti una volta a Vinci assegnai per esercizio il seguente calcolo:

$$2\text{☺}^4\square^6\cdot 3\text{☺}^7\square^2$$

Gli alunni vinciani rimasero basiti mentre i cinesi lo fecero al volo e, da allora, non ebbero più difficoltà e, in men che non si dica, s'impadronirono del calcolo monomiale. La cosa, ovviamente, mi stupì e alle mie richieste di raccontarmi cosa era successo mi dissero solo: "noi ola capito, pelché lei spiegato bene stavolta". Oltre non andarono. Mi sono occorsi anni per afferrare quella che, credo[11], sia la spiegazione e per elaborare una strategia finalizzata rendere semplice a chiunque il calcolo monomiale. Fin dall'inizio conoscevo la differenza fra i codici di scrittura occidentali (alfabetici come quello italiano oppure sillabici come quello arabo o sanscrito) e quello cinese: per noi un segno grafico (grafema) corrisponde a un suono linguistico (fonema) mentre per i cinesi un segno grafico corrisponde a un oggetto oppure a un concetto e, per questo, è detto "ideogramma". Nella scuola elementare cinese per insegnare gli ideogrammi si usano, come passo preliminare, i segni grafici fonetici. Poi si passa alla scrittura ideografica, con la quale si sono formati i preadolescenti orientali. Questo spiegherebbe perché i cinesi trovavano grandi difficoltà con la parte letterale dei monomi. Il fatto però è che quegli alunni avevano problemi anche con i coefficienti e con gli esponenti. Il punto di svolta è stato quando ho letto, su un libro di linguistica, che anche noi occidentali usiamo codici di scrittura ideografici: i segnali stradali, gli smiley di internet e, soprattutto, le dieci cifre da 0 a 9. Infatti, ad esempio, il simbolo 2 sta a significare due pecore, due mani, due gambe e la sua resa fonetica è "due" in italiano, "two" in inglese... Un cinese si rende perfettamente conto che la rappresentazione dei numeri è ideografica perché il suo sistema di codifica dei segni è stato plasmato così; al contrario un occidentale magari se ne rendeva conto all'inizio, poi però l'ha dimenticato. Perciò per un cinese preadolescente quello che per noi è il coefficiente di un monomio, lui lo vede come la parte simbolica mentre quella che per noi è la parte simbolica, per lui è quella "numerica"! Questo equivoco è alimentato dalla terminologia usata dall'insegnante. In ogni caso il cinese s'imbatte nella stessa difficoltà, rovesciata, nella quale si trova un

servito quando ho spiegato la successione di Fibonacci) segnalando di provare anche coi numeri con virgola. I più intraprendenti sono arrivati a 1,61.

[9] Se avessi avuto più tempo mi sarebbe piaciuto affrontare i sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite. Che esse rappresentano due rette l'avevo spiegato, che due rette non parallele hanno uno e un solo punto d'intersezione lo sapevano dalla prima media. Il calcolo delle coordinate di tale punto d'intersezione l'avevo insegnato con l'uso di Cabri Geometre.

[10] L'idea funziona nel seguente modo: in tutto il mondo le tabelline vengono inizialmente apprese in modo mnemonico e solo in seguito si sviluppano, non ho ben capito come, le capacità di calcolo ragionato. Tracce di tale apprendimento mnemonico si ritrovano anche in molti adulti, me compreso. A mio parere questa è la radice del fatto noto che chi parla perfettamente molte lingue continua a fare i conti in quella in cui ha imparato a farli. I cinesi hanno progettato un modo semplicissimo di evitare di mandare a memoria l'intera tavola pitagorica: sfruttano infatti la proprietà commutativa della moltiplicazione. In tal modo è sufficiente memorizzare la tabellina del 2, che è elementare, quella del 3, che è facile, quella del 5 che è la più semplice di tutte. La tabellina del 4 viene da quella del 2, quella del 10 da quella del 5 e se uno deve fare, ad esempio, 7 per 3 ribalta i fattori e sa che il risultato è 21. Infine, imparano a memoria i quadrati perfetti 36, 49, 64 e 81. Questo me lo hanno spiegato i miei alunni. Hanno anche cercato d'insegnarmi il loro modo di effettuare moltiplicazioni e divisioni complesse a mente e a velocità supersonica ma io non l'ho capito. Uno dei miei sogni è quello di conoscere una maestra elementare cinese. Possibilmente giovane & carina.

[11] Su questi argomenti non c'è, a mia conoscenza, uno straccio di letteratura. E ti assicuro che l'ho cercata dappertutto. Quindi ho dovuto affrontare il problema osservandolo direttamente.

preadolescente italiano: un monomio mette insieme l'aritmetica con la scrittura fonetica che sono due sistemi di regole e rappresentazioni presentati, fin dall'inizio, come due mondi separati e distinti. In modo del tutto inconsapevole, io trovai un modo di spiegare il calcolo monomiale ai cinesi in quanto riuscii casualmente a scrivere coefficiente e parte letterale nel loro sistema di rappresentazione. Il fatto è che, per parecchio tempo, non sono riuscito a insegnarlo come si deve agli italiani. Quest'anno, avendo a disposizione le regole delle operazioni fra potenze e, soprattutto, quelle del calcolo simbolico e i trucchetti di sostituzione ho prima insegnato le regole delle operazioni fra monomi senza coefficienti, poi ho indotto gli alunni a metterci il coefficiente 1 e infine ho spiegato come funzionano le cose con coefficienti generici in **Z** e in **Q**. Le cose sono filate lisce e, con un anno di anticipo, quegli alunni sono molto più padroni del calcolo monomiale dei loro amici di terza media e dei loro fratelli maggiori.

3. Alcune dimostrazioni.

Nei programmi dei tre anni della scuola media non sono obbligatoriamente previste le dimostrazioni dei teoremi. Solo alcuni testi presentano la semplice dimostrazione di quello di Pitagora e di alcuni risultati di Euclide e Talete che discendono dai criteri di similitudine dei triangoli. Si tratta di dimostrazioni di tipo diretto e, nella maggioranza dei casi, gli insegnanti non le propongono in classe. Per quanto ho avuto modo di sapere (dapprima al corso del sindacato finalizzato alla preparazione del concorso per l'abilitazione che frequentai nel 2000 e poi durante gli anni successivi) ci sono alcune teorie psicologiche e/o pedagogiche le quali affermano che nella fascia d'età preadolescenziale è prematuro proporre dimostrazioni complesse e che le capacità di astrazione degli alunni sono ancora parecchio limitate. Non so se queste teorie esistono veramente o se si tratta solo di una vulgata priva di fondamento. Nel caso che effettivamente tali teorie esistano, vorrei sapere su che basi sono state formulate. In ogni caso se tu andassi a qualche riunione d'insegnanti di matematica e scienze sentiresti ripetere con un'ossessione quasi compulsiva che i concetti vanno presentati in modo *concreto & operativo* perché non c'è verso di fare altrimenti, se non nei sempre più rari casi di alunni di eccezionale levatura. Qui occorre che io chiarisca la mia posizione. So bene che nella scuola media (e non solo) le nozioni vanno presentate in modo concreto e operativo, altrimenti gli alunni non le capirebbero. Affermo però, sulla base non di una posizione ideologica ma su quella della mia esperienza, che se ci si ferma a quel livello lì non si fa altro che accentuare quel livellamento verso il basso che inquina la scuola e la società in generale. Io ho sempre inserito dimostrazioni di tipo diretto nella programmazione e non ho mai avuto problemi eccessivi nel farle capire alla maggior parte delle classi. Vero è che alcuni alunni, quelli più in difficoltà, trovano difficoltà insormontabili nel comprendere non solo quelle dimostrazioni ma anche, e soprattutto, la necessità di dover dimostrare un'affermazione matematica. Quest'anno mi sono deciso a proporre alcune dimostrazioni per assurdo sui numeri primi. L'ho fatto perché gli alunni sono incuriositi da questo argomento e pongono domande alle quali non si può rispondere in modo serio senza, ad esempio, avere una sia pur vaga idea di come, a partire dalla semplicissima definizione di numero primo, possono scaturire ragionamenti non banali. Inoltre, al fine di chiarire la potenza del procedimento dimostrativo, e per rendere onore alla memoria di quel matematico che morì annegato in una botte di letame gettata da una rupe, ho deciso di proporre la dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ è irrazionale. Questo è un ottimo esempio per comprendere che le presunte teorie pedagogiche sulle capacità dei preadolescenti sono false e vuote e per accorgersi che, invece, le cose funzionano in tutto un altro modo. Per farti capire, ti scrivo in dettaglio come ho proceduto nella spiegazione e che osservazioni mi hanno fatto i ragazzini. In primo luogo gli alunni avevano tutti i prerequisiti per affrontare la dimostrazione, in parte dalla scuola elementare e dalla prima media (definizione di numero primo, di numero razionale, crivello di Eratostene per la fattorizzazione) e in parte perché glieli avevo spiegati io (definizione di numero irrazionale, nozioni di calcolo simbolico, fattorizzazione di un quadrato, definizione e proprietà della radice quadrata, importanza del processo dimostrativo nella matematica e nella vita quotidiana).

**Teorema.** $\sqrt{2}$ è irrazionale.

**Dimostrazione.** *Per assurdo:* $\sqrt{2}$ *è razionale.*

Io credevo che il problema più grosso sarebbe stato quello di far capire come funziona una dimostrazione per assurdo e avevo premesso alcuni semplicissimi esempi di dimostrazioni di quel tipo. Nessuno aveva capito alcunché. Per questo mi ero scoraggiato e avevo gettato la spugna ma, per fortuna, un alunno mi ha detto: "O professore, la cià fatto tanta pubblicità a questa dimostrazione, la cià pure detto hellè corta, ovvia, la ce la faccia tanto male alla salute la un fa: si hontinuerà a un capì nulla, male he vada!" Allora ho proposto la dimostrazione di getto, direttamente e senza espedienti. 20 su 22 l'hanno capita al volo. Anche la maggior parte di quelli che si erano arresi di fronte alla dimostrazione del Teorema di Pitagora l'ha capita! Naturalmente sono dovuto andare fino in fondo a questo fatto. In primo luogo tutta la classe era più motivata, incuriosita e sicura che all'inizio dell'anno e, oltretutto, avevo fatto una grande pubblicità a quella dimostrazione, raccontando anche l'aneddoto della botte di letame. In secondo luogo gli espedienti che avevo usato erano fuorvianti, trattandosi di affermazioni ovvie che, in ogni caso, potevano essere dimostrate direttamente e pertanto occultavano il senso di quello che volevo spiegare. Soprattutto avevo sottovalutato chi mi stava di fronte. In fin dei conti la dimostrazione per assurdo consiste nel provare la verità di un'affermazione dimostrando la falsità del suo contrario, come ben sa chi farcisce i libri di testo di quegli allucinanti esercizi a caselle vero/falso che gli alunni fanno tirando giustamente a caso. Sia come sia, il concetto di dimostrazione per assurdo è un prerequisito che uno ha, secondo me, dalla scuola materna[12]. Dico questo perché, in un momento successivo, ho proposto la stessa dimostrazione nell'altra classe di Compiobbi e le cose sono filate lisce come l'olio, senza bisogno di espedienti.

*Allora* $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ *e si può supporre che* $\frac{a}{b}$ *sia ridotta ai minimi termini.*

Nessun problema per far capire questo fatto anzi: alcuni hanno protestato per la mia insistenza perché si tratta di un'ovvietà non degna di menzione.

*Si nota che* a *e* b *non possono essere entrambi pari perché, se lo fossero, numeratore e denominatore potrebbero essere divisi per 2 e la frazione non sarebbe ai minimi termini.*

Non solo non ci sono stati problemi a spiegare questo fatto ma alcuni giorni dopo mi hanno pure fatto osservare che si tratta di una dimostrazione per assurdo nella dimostrazione per assurdo.

*Elevando al quadrato ambedue i membri dell'uguaglianza si ottiene* $2=\frac{a^2}{b^2}$ *e quindi si ha che* $a^2=2b^2$.

Siccome il calcolo simbolico l'avevano capito non c'è stato problema.

*Allora* $a^2$ *è pari e quindi anche* $a$ *lo è perché se non lo fosse non conterrebbe il fattore 2 che poi però compare in* $a^2$.

Anche qui nessun problema.

*Di conseguenza* $a=2r$ *per un opportuno numero* $r$.

Ovviamente mi hanno subito fatto notare che l'opportuno numero $r$ è la metà di $a$.

*Sostituendo si ha pertanto* $4r^2=2b^2$ *e, semplificando,* $2r^2=b^2$ *quindi, come prima,* $b^2$ *è pari e perciò* $b$ *è pari; ma allora sia* $a$ *sia* $b$ *sono pari e ciò è assurdo. Tiè! L'assurdo nasce dall'aver supposto* $\sqrt{2}$ *razionale*[13].

A questo punto gli studenti si sono chiesti, con la massima naturalezza e senza che io avessi detto nulla in proposito, se anche $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ sono irrazionali. Il giorno dopo ho proposto loro la dimostrazione che $\sqrt{p}$ è irrazionale per ogni primo $p$ e hanno capito pure quella. Anche la classica dimostrazione dell'infinità dei numeri primi è stata accettata e compresa senza problemi, avendo l'accortezza di proporla in prima battuta con il linguaggio delle tabelline e parlando in un secondo momento di divisori. Ho dato un compito in classe in cui ho chiesto, come esercizio facoltativo, di esporre una delle tre dimostrazioni fatte. La maggioranza degli alunni le ha esposte tutte e tre, nonostante il fatto che il compito fosse lunghissimo. Il punto fondamentale è che, come ti ho detto al telefono, già in quel compito sono saltate le fasce di livello: alcuni alunni in difficoltà hanno dimostrato capacità insospettabili mentre altri, invece, sono peggiorati. Mediamente, però, c'è stato un netto livellamento verso l'alto. Ho effettuato altri esperimenti di questo tipo e il fenomeno dell'innalzamento del livello medio si è precisato ed accentuato. Il fatto è stato talmente evidente e sorprendente che ho dovuto meditarci sopra a fondo. Dapprima ho realizzato che se il docente comincia a fare veramente sul serio, chi impara lo percepisce e inizia a fare altrettanto. Inoltre se il livello viene alzato su concetti interessanti, e non su nozioni tecniche, cresce il livello di attenzione e i risultati arrivano in modo naturale. Ma questo non esaurisce il discorso. Se ti metti nei panni di un preadolescente ti rendi conto che ha due modalità di rapportarsi alla vita e allo studio. La prima è sintetizzabile dall'espressione "io devo": "io devo studià e imparà perché sennò i mi genitori mi tonfano e un mi homprano la pleistescion 2". Come tutte le motivazioni indotte dall'esterno anche questa è superficiale, instabile e, prima o poi, porta a una crisi. La seconda modalità la sintetizzerei con l'espressione "io voglio": "io sono il più ganzo e quindi voglio andà bene a scuola e umilià quei deficienti dei mi hompagni". Questa è una motivazione che viene dall'interno e quindi è più stabile della prima. Tuttavia può portare all'arroganza e quando le cose diventano dure, gli arroganti vanno in pezzi. Invece, assegnando elaborati ed esercizi facoltativi,

[12] Prova a fare le seguenti domande a un bambino di 5 anni: "Il fuoco è caldo: vero o falso?" Quello ti risponderà: "Vero!" Poi chiedigli: "Il fuoco è freddo: vero o falso?" Se ti risponde che è falso vuol dire che ha capito la dimostrazione per assurdo. Se invece ti risponde che è vero allora ha il cervello di un palmipede lobotomizzato.

[13] Ammesso che non mi sia bevuto il cervello, il che è possibile, mi sembra di poter dire che l'assurdo nasceva molto prima (questo peraltro l'hanno sospettato due alunne che però non si sono espresse chiaramente), e cioè direttamente dall'uguaglianza $a^2=2b^2$ infatti da questa viene che $a^2$ è pari, quindi $a$ è pari e allora $b$ è necessariamente dispari per quanto detto. In tal caso si arriva subito all'assurdo osservando che $a^2$ contiene il fattore 2 con esponente 1 e ciò è impossibile perché nella fattorizzazione di un quadrato ogni fattore ha necessariamente esponente pari. Credo che con questa scorciatoia la dimostrazione venga ancora più semplice se ti metti nei panni di un preadolescente che per settimane è stato sottoposto a noiose fattorizzazioni di numeri impresentabili.

senza dare né punizioni né premi, onde non alimentare né la depressione né l'arroganza, si afferma la modalità più sana: "io posso". Io posso capire queste cose difficili perché sono interessanti, belle e utili. Poi saranno fatti miei come riuscire a spiegarle a quella crapa di cemento di mio babbo e a quel mentecatto di mio fratello maggiore che di fronte a una banale equazione di secondo grado non capisce neppure la differenza fra incognita, coefficienti e soluzioni. Vero è che per innescare questa terza modalità occorre fornire agli alunni strumenti migliori di quelli proposti nei programmi.

4. Alcune "curiosità" matematiche.

Come saprai, pare che ci siano alcuni problemi nel tenere la disciplina in classe nella scuola media. Io non ho quasi mai avuto di queste difficoltà[14] ma capisco da dove nasce la questione. Il fatto è che si ha a che fare con individui nell'età dello sviluppo i quali, giustamente, pensano a tutt'altro che all'apprendimento. Di conseguenza o fai lezioni brillanti o quelli fanno valere la forza del branco e ti bevono come un cuba libre. Allora ho preso l'abitudine d'inserire nel programma alcune nozioni matematiche "divertenti" che quest'anno ho estratto (e rielaborato) in massima parte da un libro anglosassone[15]:

Semplici elementi di trigonometria. Avendo a disposizione la definizioni di angolo, di somma e differenza di angoli, quella del numero $\pi$, il teorema di Pitagora e le proporzioni è semplice insegnare la conversione gradi-radianti, disegnare il cerchio trigonometrico e definire le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente. Inoltre non è stato un problema usare queste nozioni trigonometriche per rivedere i casi del triangolo rettangolo isoscele e del triangolo equilatero. Ti allego alcuni elaborati su questi argomenti.

La funzione logaritmo. Mi risulta che in alcune scuole medie, fino ai primi anni ottanta, veniva insegnato il logaritmo in base 10 al fine di mettere in grado gli alunni di usare le tavole trigonometriche[16]. Attualmente quelle tavole sono state dimenticate ma il guaio è che è stato dimenticato anche il logaritmo. Ovviamente non è possibile definirlo tramite l'integrale e quindi occorre accontentarsi d'introdurlo come l'esponente che va dato alla base per ottenere l'argomento. Quest'anno, avendo a disposizione il calcolo simbolico, me ne sono servito come esempio (facendo sviluppare i semplici conti dagli alunni in modo autonomo) per spiegare meglio che la composizione di una funzione con la sua inversa è l'identità. Negli anni passati sono arrivato a far ricavare agli alunni la formula del cambio di base su esempi numerici.

La successione $2^n$. L'unico esempio che i testi riportano è la classica leggenda dell'inventore degli scacchi che chiese al re tanti chicchi di grano quanti ne stanno su una scacchiera secondo la regola: un chicco nella prima casella, due nella seconda, quattro nella terza... Capisci bene che in un mondo dove gli scacchi sono in disuso e dove nessuno ha modo di vedere un chicco di grano, questa storia è quantomeno esotica. Un esempio assai più illuminante è quello fornito dal seguente esercizio: *"Prendete un foglio di carta di forma quadrata, di spessore 0.1 mm, sufficientemente grande da poter essere piegato a metà per 60 volte. Quale sarà lo spessore del foglio alla 60-esima piegatura?"* Un alunno di quarta elementare, dotato di un minimo di cervello e di una calcolatrice, ha tutti i prerequisiti per arrivare al risultato finale, che supera la distanza media Terra-Sole. Questo esercizio è stato svolto senza difficoltà dai miei alunni[17] ma ha allarmato alcune delle loro giovani mamme le quali sono venute da me, stupefatte, a chiedere dove si nascondeva l'errore. Io ne ho approfittato per spiegare loro un po' di matematica. Non so se le ho convinte. Quanto agli alunni mi sono servito dell'esercizio per far confrontare loro, mediante l'uso di Excel, i grafici delle funzioni discrete $f(n) = n^2$, che già conoscevano, e $f(n) = 2^n$. In tal modo hanno potuto rendersi concretamente conto della velocità con cui diverge l'esponenziale. Inoltre mi sono servito di tale esempio per affrontare un problema di cui ti scrivo nel seguito.

Il nastro di Moebius. Da che mondo è mondo, come la Storia insegna e come tutti sappiamo, il nastro di Moebius fa sempre folklore. Anche quest'anno l'ho proposto agli alunni. Loro l'hanno incollato e colorato ma, stavolta, sono rimasti freddini. Allora, come tutti gli anni, ho proposto di tagliarlo longitudinalmente e loro, armati delle forbici che si portano sempre dietro per combinare disastri, l'hanno tagliato. E sono rimasti freddini. Meno male che hanno avuto l'idea di tagliarlo una seconda volta. E sono rimasti stupefatti. Il più sbigottito di tutti ero io che, non avendoci mai pensato, non mi ero immaginato che potesse succedere una cosa

[14] Le rare volte che a Vinci hanno provato a mettermi i piedi sulla testa si sono resi conto a loro spese che le mie reazioni possono essere assai più imprevedibili delle loro. Per inciso ti segnalo che ci sono alcuni trucchi, elaborati dagli esperti di pedagogia francesi, per tenere l'ordine in classe. Il primo è costringere fin dal primo giorno gli alunni a scrivere in bella grafia. Il secondo è non prendersi mai libertà di linguaggio con loro e non prenderli mai in giro. Il terzo è vestirsi in modo adeguato ad una persona seria e rispettabile quale è un insegnante. Mi chiedo come farò a andare al lavoro in giacca, cravatta e cappotto di cammello sulla Harley Davidson. Certo che quando mi arriverà la moto sarò preside e potrò quindi presentarmi a scuola vestito da teppista, visto che gli esperti di pedagogia non dicono nulla in proposito.

[15] Il libro è *"Coincidences, Chaos and all That Math Jazz"* di E. B Burger & M. Starbird ed. W. W. Norton (2005). Si tratta di un testo divulgativo, non finalizzato all'insegnamento. E' splendido, a mio parere sarebbe opportuno che lo pubblicassero anche in italiano.

[16] Ad esempio Paolo Breglia studiò i logaritmi in terza media, nel 1982. Io invece non ricordo se li studiai alle medie, già allora ero interessato ad altro.

[17] Ad alcuni ho assegnato anche l'esercizio: *"Un foglio di carta piegato 60 volte ha la forma di un quadrato di lato 10 cm, quale è l'area del foglio senza piegature?"*

del genere. Allora ho assegnato un'esercitazione (di cui ti allego qualche elaborato) su quel fenomeno del nastro di Moebius. Poi ho spiegato, in termini neanche troppo semplificati (parlando di colore invece che di vettore normale), le superfici orientabili e quelle non orientabili. Anche in questo caso ho dovuto ricevere mandrie di genitori desiderosi di spiegazioni e armati di nastri di Moebius lunghi ettometri, che avevano personalmente tagliato. L'unico maschio era un ingegnere. Ti segnalo anche che, a Vinci, una ragazzina algerina riuscì a trovare un modo di disegnare il nastro di Moebius con Cabri Geometre. Si tratta però di una tipa di capacità fuori dalla norma.

La successione di Fibonacci e le spirali. Agli alunni piace molto cercare di scoprire come va a finire la successione di Fibonacci e anche i meno interessati ci riescono. Quest'anno, avendo a disposizione le equazioni di secondo grado e un altro libro anglosassone fatto molto bene[18], ho potuto svolgere parecchi esempi e presentare un po' di teoria. Inoltre ho anche dato un'esercitazione sul disegno di una spirale di cui ti allego un elaborato.

I frattali. Ovviamente non si possono introdurre rigorosamente i frattali nella scuola media. Tuttavia è possibile presentarli in modo istruttivo perché qualsiasi alunno è in grado di comprendere l'assioma euclideo che *"la parte è nel tutto"* mediante l'esempio del punto (la parte) che sta sulla retta (il tutto). Si può allora definire il frattale come una figura geometrica in cui, pur restando vero che la parte è nel tutto, è vero anche che il tutto è nella parte e rendere concrete le cose mostrando la seguente diapositiva:

In questo modo almeno il fenomeno di autosimilarità viene presentato con una certa precisione. Ci sono poi dei programmi coi quali è possibile isolare le parti dell'immagine elettronica di un frattale, ingrandirle e sovrapporle al frattale di partenza. Questo tipo di esercitazioni ha avuto un grande successo. Inoltre gli alunni hanno realizzato un tabellone zeppo di frattali da appendere al muro ed alcuni hanno letto anche i capitoli dedicati a quest'argomento sui libri in inglese che ho citato in nota.

La "matematica delle trasformazioni" e alcuni semplici elementi di cartografia. I programmi ministeriali prevedono un'introduzione alle affinità, proiettività, omotetie... Ti dirò che, in alcuni libri di testo, questa parte è fatta abbastanza bene ma fra i miei colleghi non conosco nessuno che la inserisca nel programma. Io la tratto sempre e faccio anche uso dei programmi Cabri Geometre e Google-Earth per renderla più concreta possibile. Ovviamente enuncio anche il Teorema Egregium di Gauss. Di solito gli alunni sono interessati e non ho da lamentarmi della loro comprensione. Quest'anno ho inserito anche alcuni elementi di cartografia per rendere le cose più divertenti. Ho seguito, semplificandolo, il manuale universitario di geografia degli anni '50 di mia madre, che è fatto benissimo. Ho trattato, in modo assolutamente grafico, della proiezione stereografica e di quella di Mercatore e poi ho cercato di dare un'idea di quella di Gauss-Boaga. In tal modo, mi sembra di poter dire, gli alunni hanno compreso che le trasformazioni conformi hanno il prezzo di perdere le proporzioni fra le aree. Alla fine ho mostrato loro il planisfero di Arno Peters, che rispetta le proporzioni fra le aree ma perde ogni senso degli angoli. E' una carta molto interessante anche dal punto di vista geopolitico. Devi sapere, per inciso, che la scorsa estate feci, con Anna Mugnai – una ragazza che si è laureata con Vincenzo Ancona, una ricerca bibliografica sugli aspetti matematici della cartografia. Ci rendemmo conto che c'è pochissimo materiale interessante e che i manuali universitari moderni sono piuttosto superficiali.

Il numero degli antenati di una persona generica. Questo è l'argomento più istruttivo nel quale mi sia mai imbattuto. L'idea mi venne per caso nel 2004 quando trovai in un libro di testo un esercizio finalizzato a spiegare la successione $2^n$ mediante l'esempio che ognuno ha 2 genitori, 4 nonni, 8 bisnonni... Non avendo nulla di meglio da fare cominciai a sviluppare un conto pedestre sul caso di un bambino nato nel 2000, supponendo che ogni 20 anni si formi una generazione. Escludendo incesti e pateracchi vari, nell'anno zero dovevano esserci $2^{100}$ individui, senza contare chi aveva fatto voto di castità, gli impotenti, le sterili, i castrati, gli sfigati e quelli le cui linee di successione si erano tutte seccate troppo presto. Ma $2^{100}$ è un numero dell'ordine di $10^{30}$ è ciò è assurdo. L'universo non potrebbe contenere tutte quelle persone. Peraltro, non so come, hanno calcolato che nel I secolo DC c'erano 250 milioni di persone. Allora ci debbono essere delle ripetizioni, cioè delle parentele. Per due anni mi sono trastullato con questo fatto e, riempiendo fogli e fogli di conti, ho stabilito non c'è barba di parentela che possa fermare l'esponenziale: a un certo punto quello invariabilmente parte e non lo regge più nessuno. Peraltro con questo problema ho mandato in tilt parecchi laureati in materie scientifiche. Pur non conoscendo la soluzione generale proposi ai poveri alunni di Vinci alcuni esercizi estratti dai conti che avevo fatto:

[18] Si tratta di *"The Golden Ratio, the Story of Phy, the Extraordinary Number of Nature, Art and Beauty"* di Mario Livio ed. Headline Review (2002). C'è poco da fare: sulla divulgazione gli anglosassoni ci sanno fare. Forse è perché gliene importa qualcosa.

Esercizio 1. *Se due cugini di primo grado hanno un bambino, come si riduce il numero di antenati che questo bambino ha?*

Si tratta di un esercizio facilino e quasi tutti lo sanno fare. Quello dopo è pesante:

Esercizio 2. *Se due cugini di <u>secondo</u> grado hanno un bambino, come si riduce il numero di antenati che questo bambino ha?*

Nessun alunno italiano ci riuscì. I cinesi invece, dopo aver bofonchiato, in un paio di giorni arrivarono alla soluzione. I magrebini lo risolsero al volo: il motivo è misterioso, deve essere nascosto nelle pieghe del mantello di Allah Misericordioso & Compassionevole. Sia come sia, secondo me si tratta di due esercizi molto istruttivi perché ti costringono ad applicare la matematica a qualcosa in cui sei davvero immerso: la tua famiglia. Per mia esperienza posso dire che devi elaborare il modello matematico più concreto immaginabile, che riguarda il fondamento stesso della tua esistenza. La scorsa estate ho trovato in un libro[19] la soluzione del problema, peraltro relativamente recente (1999). Semplificando all'estremo, come ho fatto in classe, ti spiego l'idea generale: da una parte, andando dal passato al presente, c'è il dato di fatto che la razza umana ha avuto un incremento demografico a partire dallo sviluppo dell'agricoltura (3000 AC). Dall'altra parte, andando dal presente al passato, c'è la genealogia dell'individuo generico oggi vivente, che ad ogni passo aumenta. Come ti dicevo, non c'è parentela che possa fermare più di tanto l'esponenziale: in un certo intervallo di anni il numero di antenati dell'individuo generico supera il numero di persone che vivevano sulla terra in quegli anni (e che si riproducevano gioiosamente). Se poi vuoi tornare ancora indietro devi prendere l'individuo generico che viveva in quegli anni lì e rifare lo stesso giochino. Naturalmente le cose sono un po' più complicate, ma la morale è che basta tornare indietro di un paio di millenni per collegare chiunque vive oggi allo stesso gruppo di antenati comuni[20]. Il libro che ho letto usa questo fatto semplicemente per dire che forse discendiamo tutti dai figli illegittimi che Confucio e Giulio Cesare seminarono a giro, ma c'è invece una conseguenza molto più interessante: chiunque di noi ha nella sua genealogia marocchini, albanesi, cinesi, bisessuali, juventini[21]... Quindi non ha senso parlare di razze pure: questo ragionamento matematico spazza via ogni fondamento di qualsiasi tipo di razzismo e fornisce ben altra sostanza agli astratti slogan religiosi del tipo "siamo tutti fratelli". Quest'anno, per spiegare il modello agli alunni, prima ho proposto loro i due esercizi e poi mi sono preparato dei diagrammi ad hoc per illustrare come funzionano le cose. Sono stati tutti attentissimi per due ore filate in quanto un simile ragionamento provoca, in modo naturale, un ascolto attivo dei presenti. Il messaggio finale, inoltre, è arrivato a tutti[22] anche perché una simile conclusione non va accettata per fede, ma può essere compresa tramite un processo logico. Una delle cose che voglio fare è capire i dettagli tecnici di questo modello (quello che ti ho esposto l'ho ricavato solo dal libro divulgativo che ho letto e dai conti che avevo fatto) per mettere a punto delle lezioni ancora più incisive.

5. <u>Un po' di matematica astratta</u>.

Di quel che dicono le teorie psico-pedagogiche riguardo alle capacità di astrazione dei preadolescenti ti ho già scritto e, oltre a ciò, per presentare un po' di strutture algebriche nella scuola media mancano due elementi fondamentali: il linguaggio degli insiemi e il calcolo simbolico. Per quanto riguarda gli insiemi devi sapere che i nuovi libri di testo, improntati alla riforma Moratti, li presentano in terza media e non più in prima. Il calcolo simbolico, come ti ho scritto, viene presentato (superficialmente) dopo i polinomi nell'ambito delle equazioni di primo grado, quando si è troppo a ridosso dell'esame per parlare di strutture algebriche. Avrai capito che io e i programmi ministeriali apparteniamo a due mondi distinti e inconciliabili perciò, da che insegno, dedico sempre le prime due settimane di ogni anno scolastico al ripasso del linguaggio degli insiemi che gli alunni hanno imparato, a volte assai bene, nel corso della scuola elementare. Oltre a ciò quest'anno avevo costruito una classe con ottime abilità nel calcolo simbolico. Pertanto, dall'inizio del secondo quadrimestre, ho mollato ogni remora e/o freno e ho progressivamente aumentato il livello di astrazione delle mie lezioni. Ho iniziato presentando correttamente il concetto di funzione, che i testi enunciano in modo ridicolo. Il problema è stato che ho accelerato in modo troppo brusco e la classe ha dichiarato di non aver capito niente. Però il giorno dopo è venuto da me un ragazzino, considerato di fascia medio-bassa, mi ha detto che lui aveva capito benissimo e mi ha

[19] Si tratta di un testo divulgativo: *"Mappe della Storia dell'Uomo"* di Steve Olson ed. Einaudi (2003) pagg. 42-45. Vedi anche *Recent Common Ancestors of All Present-Day Individuals* in Advances in Applied Probability 31 (1999), pp. 1002-26; *Dozen of Cousins: Blue Genes, Horse Thieves, and Other Relative Surprises in your Family Tree*, Lois Horowitz ed. Ten Speed Press, Berkeley (1999).

[20] Il libro di Olson afferma anche che fra i nostri antenati di soli 800 anni fa era inclusa la maggior parte della popolazione adulta della regione del mondo in cui vivevano (escluso chi non si riproduceva e quelli le cui linee discendenti si sono seccate).

[21] Ancora non ho capito come si inseriscono in questo modello matematico-statistico i Pellerossa, gli Aztechi, i Maya e i Polinesiani, che 2000 anni fa dovevano essere isolati. Comunque il modello è coerente con le teorie del genetista Luca Cavalli-Sforza (vedi *Razza o Pregiudizio?* di Luca e Francesco Cavalli-Sforza, Ada Piazza ed. Einaudi-Scuola (1996)). Mah! 2000 anni fa dovevano succedere cose veramente bizzarre.

[22] A dire il vero un ragazzino, razzista irriducibile, è diventato ancora più razzista: infatti è andato a giro per giorni dando di marocchino, gobbo bastardo, terrone, francese effeminato, boscimano marcio, mezzo frocio, albanese a tutti quelli che incontrava. Alla mia richiesta di spiegazioni ha risposto: "Icchè ho detto di sbagliato? Queste hose la me l'ha spiegate lei! Le ho capite bene, le son proprio giuste!"

consegnato un elaborato (che ti allego), fatto senza che io avessi chiesto nulla, con alcuni esempi di funzioni. Dopo averlo letto ho corretto il tiro e ho rispiegato il concetto di funzione che, stavolta, la classe ha compreso. Ho avuto qualche difficoltà a far capire l'iniettività e la suriettività ma, dopo poco, anche queste nozioni sono state accettate. Con l'aiuto di Excel e di Cabri Geometre anche la definizione di grafico come sottoinsieme del piano cartesiano non è stata un problema. A partire dal concetto di funzione ho introdotto logaritmi e trigonometria. Il secondo passo è stato quello d'introdurre le relazioni di equivalenza e, stavolta, avevo le idee molto chiare riguardo alla strategia da seguire. Ho scritto, ex abrupto, sulla lavagna:

**Definizione**: *Sia* $\mathrm{S}$ *un insieme e sia* $\mathcal{R}$ *una relazione*[23] *fra gli elementi di* $\mathrm{S}$. *Se,* $\forall$ a,b,c $\in$ $\mathrm{S}$, *si ha:*

- $a\mathcal{R}a$;
- $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;
- $a\mathcal{R}b$ *e* $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$;

*allora* $\mathcal{R}$ *viene detta "Relazione di Equivalenza su* $\mathrm{S}$*".*

Mi hanno subito chiesto: "Oicchellè sto' geroglifiho?" Io ho allora chiarito il significato dei simboli matematici (che hanno avuto un grande successo: alcuni hanno iniziato a usarli, di loro spontanea volontà, anche negli esercizi del programma standard) e non ho mai usato né i termini Riflessiva, Simmetrica e Transitiva né il prodotto cartesiano onde non appesantire la situazione. Poi ho proposto il seguente esercizio da svolgere subito in classe:

*Sia* $\mathrm{S}$ *l'insieme degli alunni della Scuola di Compiobbi nell'Anno Scolastico 2006/2007. Due alunni sono in relazione fra loro se, e solo se, sono iscritti nella stessa classe. Dire se le tre proprietà sono verificate.*

In questo modo sono arrivate gratis le nozioni di classe di equivalenza, di rappresentante di classe di equivalenza (il primo o l'ultimo in ordine alfabetico in ogni classe), di partizione disgiunta di un insieme in classi di equivalenza (ho fatto la dimostrazione e non ci sono stati problemi). Poi ho mostrato altri esempi e ho chiesto agli alunni di proporne altri di loro invenzione e si sono fatte le verifiche[24] in classe. A tutto ciò ho dedicato tre lezioni e poi ho chiesto un elaborato in cui sviluppare esempi propri, che ti allego. Come vedrai ci sono degli errori e certe cose erano ancora poco chiare, ma la sostanza c'è e alcuni esempi sono davvero originali. Il motivo per cui ho introdotto le relazioni è che volevo rivisitare, usando le classi di equivalenza e i loro rappresentanti più naturali, alcuni argomenti di aritmetica e geometria dei programmi di prima e seconda media al fine di renderli più chiari: l'equivalenza delle figure piane, la congruenza, l'omotetia e, soprattutto, i numeri razionali. Dopo la rivisitazione debbo dire che sono soddisfatto del risultato e sono convinto che presentare la nozione di relazione di equivalenza alle medie non sia affatto una forzatura. Invece è forse una forzatura spiegare le strutture algebriche, dai gruppi fino agli spazi vettoriali. D'altra parte capisci bene che prima delle vacanze pasquali avevo finito il programma di seconda, il programma di terza, mi ero avventurato in quello delle scuole superiori e pure oltre. Inoltre gli alunni erano assatanati per la matematica e qualcosa dovevo pur fare. In realtà, da anni, morivo dalla voglia scatenarmi sull'algebra vera. Avendo a disposizione il calcolo simbolico, e avendo allenato le capacità di astrazione degli alunni con le classi di equivalenza, non è stato un problema definire gruppi, anelli e campi avendo, oltretutto, a disposizione un buon serbatoio di esempi: gli insiemi numerici **Z**, **Q** e **R**; $K[x_1,\dots,x_n]$; le isometrie nel piano... Le definizioni sono state accettate tranquillamente e sulle verifiche degli esempi gli alunni sapevano lavorare. Per due ore a settimana ho fatto lezioni e sessioni collettive di risoluzione di problemi alla lavagna. Un problema lo ha però costituito la nozione di omomorfismo perché avrei avuto bisogno di più tempo per farla digerire. Comunque una buona metà della classe alla fine la sapeva gestire. Il problema vero, tuttavia, è che questo tipo di matematica all'inizio è un po' formale e le definizioni sono noiose. Gli alunni stessi mi hanno detto che preferivano risolvere una sana equazione di secondo grado, o annodare il buon vecchio nastro di Moebius, oppure inventarsi una relazione di equivalenza pirotecnica. Io credo però che, se presentata in modo vivace, con esempi ad hoc che provochino negli alunni un ascolto attivo e con esercizi studiati per quella fascia d'età, l'algebra astratta possa essere insegnata senza problemi. Una menzione a parte la meritano gli spazi vettoriali e i primi elementi di algebra lineare. Su queste cose non ho avuto problemi, forse perché le adoro e le so spiegare bene. La definizione di spazio vettoriale è quella che è, tuttavia gli esempi di $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^n$ sono simpatici e da essi si ricava in modo semplicissimo la definizione di base e quindi quella di dimensione. Oltretutto, con l'utilizzo della tavola pitagorica, le matrici si introducono naturalmente (avendo l'accortezza di chiamarle tabelle) e si può spiegare, usando le base canonica, come

[23] Sugli elaborati c'è la tilde, io qui ho dovuto mettere $\mathcal{R}$ perché questo computer non ha la tilde.

[24] Un consiglio: se mai proverai a spiegare le relazioni di equivalenza in questo modo non farti propinare un esempio come: *Due studenti dell'Uddini sono in relazione se, e solo se, sono fidanzati.* Potrebbe infatti succedere, come è successo a me, che uno ti chieda, molto seriamente: "Ma la prima proprietà vuol dire masturbarsi, vero?" E un altro: "Si certo! Una sega vera nel bel mezzo di questa gran sega mentale!" Non sapevo se ridere, arrabbiarmi, far finta di niente o rispondere. Comunque ho cambiato esempio perché in questo la proprietà transitiva, anche se palesemente falsa, è un vero campo minato.

trasformare una applicazione lineare data di End(V), nei casi V= $\mathbf{R}^2$ e V= $\mathbf{R}^3$, in una matrice. Inoltre, a chi piace risolvere un'equazione di secondo grado piace anche calcolare il determinante di una 3x3 con la differenza che se cerca d'insegnare come si fa al fratello maggiore inetto, rischia di ucciderlo. Al di là degli scherzi: insegnare l'algebra lineare alle medie è possibile e divertentissimo. Purtroppo resta aperta una domanda difficile: che senso ha farlo? D'altra parte, volendo essere suriettivi, c'è anche da chiedersi se ha un senso insegnare i problemi del tre semplice e del tre composto che, per farli digerire agli alunni, portano via almeno un mese di lezioni.

6. <u>L'informatica e il codice HTML.</u>

Se guardi i libri di testo d'informatica per la scuola media hai modo di renderti conto che si riducono all'insegnamento dei più comuni programmi di Microsoft Office. Il fatto è che, di solito, un ragazzino di 12 anni quei programmi, salvo Excel, li sa usare assai bene ed è anche ben conscio del fatto che non deve fidarsi troppo del computer. Infatti, standoci davanti per ore, i ragazzini hanno chiaro che i computer commettono degli errori e vorrebbero casomai sapere come, quando e perché sbagliano. Per questo io mi sono sempre limitato a spiegare a fondo la matematica con l'uso di Excel, Cabri Geometre e, nei corsi di recupero alla scuola di Vinci, anche CoCoA per quelli che i polinomi proprio non li capivano. Ho sempre assegnato anche esercizi maniacali, finalizzati a indurre il computer o il programma all'errore per allenare gli alunni ad affinare il proprio senso critico. Oltre a questo ho sempre insegnato anche il codice HTML (sia sotto Windows sia sotto Linux, tanto le cose funzionano nello stesso modo) e assegnato le ricerche di scienze richiedendole in forma di ipertesto. Insegnare HTML alle medie è semplicissimo perché è sufficiente una lezione di un'ora per:

- Mostrare lo scheletro di un codice;
- Enunciare una dozzina di comandi HTML importanti;
- Spiegare la procedura per salvare dall'editor il file, riaprirlo con il browser e giocare con editor e browser per fare le modifiche.

Tu non puoi avere idea della velocità con cui gli alunni s'impadroniscono di HTML e cosa imparano a fare in tempi brevissimi[25]. Questo è normale perché, da un lato, sono interessati al computer e si divertono ma, soprattutto, dall'altro lato sono esposti, nei corsi di italiano, allo studio dell'analisi grammaticale, logica e del periodo e quindi per loro imparare un rudimentale linguaggio informatico è uno scherzo. Ti ho salvato su CD-rom alcuni degli ipertesti che mi hanno fatto, omettendo le immagini perché non avevo voglia di modificare i codici. Inoltre, come ti ho detto, quest'anno ho effettuato un piccolo corso d'informatica ai bambini della prima elementare di Compiobbi e alle loro maestre. Benché abituato alla velocità di apprendimento degli adolescenti sono rimasto sgomento di fronte a quella dei nati nell'anno 2000. Quei bambini sapevano a malapena leggere ma erano perfettamente consci in quale sottocartella di quale cartella si trovavano e in quale sottocartella di quale cartella dovevano andare per copiare una precisa immagine per poi incollarla nel loro file. Un senso dell'orientamento naturale che né io né le loro maestre potevamo comprendere o gestire. In particolare, in quel corso d'informatica, ho avuto modo di prendere coscienza delle spaventose capacità di astrazione di cui un bambino è dotato e mi sono reso conto che l'algebra va insegnata alle elementari, partendo ovviamente da categorie e funtori. Di questo ho avuto un altro riscontro che ti esporrò fra breve.

<u>Conclusioni.</u>

In quest'anno di esperimenti ho avuto modo di fare tutta una serie di riflessioni.

In generale, per insegnare qualcosa agli altri condizione necessaria -ma non sufficiente- è che occorre conoscere bene quel qualcosa. Questo non basta perché è anche necessario imparare ad insegnare e a tal fine la strada occorre tracciarsela da soli perché le varie teorie psico-pedagogiche in giro, giuste o sbagliate che siano non ha importanza, sono tutte strutture che ti portano a vedere la realtà come dovrebbe essere, non come è[26]. Allora, se si vuol vedere la realtà per come essa è, occorre focalizzarsi sull'individuo che si ha davanti in quel preciso momento e in quel preciso luogo, dimenticando stereotipi, etichette e simboli, sforzarsi di capire di cosa necessita e, se possibile, darglielo. Questo è il percorso tramite il quale sono arrivato alla conclusione che si può insegnare concetti matematici difficili a persone di fasce di età insospettabili. Non sono l'unico che la pensa così perché, a un livello ben più alto del mio, il genetista Luca Cavalli-Sforza, che insegna a Stanford ma scrive anche libri di scienze per la scuola media italiana, è ben conscio di questo fatto e sostiene che si deve presentare la matematica superiore fin dalle elementari perché se un bambino di 2 anni riesce, con scandalosa facilità, nell'impresa fantastica di imparare perfettamente due o tre lingue in pochi mesi, sarebbe anche capace d'imparare la matematica

[25] Avendo anche a disposizione gli ottimi tutorial di HTML che scaricano da internet.

[26] Ovviamente non tutti i libri di pedagogia o sull'insegnamento della matematica e delle scienze sono inutili. Te ne segnalo tre, tutti francesi. *Insegnare senza Stress* di Jean-Claude Dortu ed. UTET (1997), ottimo per tenere l'ordine in classe senza dover far finta di essere Goebbels. *Matematica, mio terrore* di Anne Siety ed. Salani (2003), ottimo per sbloccare chi si è avvitato su se stesso. Ti segnalo soprattutto *Siate saggi, diventate profeti* di G. Charpak e R. Omnes ed. Codice (2004), ottimo per diventare un profeta. Charpak è il Premio Nobel per la fisica del 1992. Si tratta del libro più antireligioso che sia mai stato scritto e che, soprattutto nell'appendice a pag. 173, delinea come insegnare seriamente matematica e scienze ai bambini. E' uno dei libri più belli che io abbia mai letto. Questi tre testi pare che li conosca solo io. Ne ho parlato a degli esperti di pedagogia ma sono cascati tutti dalle nuvole.

più astratta con la stessa facilità, se solo qualcuno gliela insegnasse[27]. Ho avuto modo di avere uno scambio d'idee con suo figlio Francesco Cavalli-Sforza, dopo una conferenza sull'insegnamento scientifico che tenne a Firenze a marzo di quest'anno. Lui mi ha detto delle teorie di suo padre e mi ha anche segnalato che negli USA e nell'ex Unione Sovietica erano a conoscenza di questo fatto e che, quando emergeva qualche ragazzino superdotato, lo portavano direttamente all'università[28]. Facendone un disadattato sradicato dal suo ambiente. Invece, mi ha detto Francesco Cavalli-Sforza, sarebbe molto meglio insegnare <u>a tutti gli alunni</u> la matematica seria perché, se nessuno gliela spiega, come possono far emergere le loro naturali capacità? Il fenomeno del drastico innalzamento del livello medio della mia classe, quando ho cominciato a infliggere agli alunni alcuni elementi di matematica interessante, secondo me prova che quel che dice Cavalli-Sforza è la realtà dei fatti, non una teoria astratta. Inoltre l'evidente degrado della società è dovuto alla violenza e alla miseria dilaganti e queste nascono dall'ignoranza. E' facile constatare, senza bisogno di tante teorie, che l'unico modo per arginare l'ignoranza è aumentare il livello dell'istruzione, anche dell'istruzione scientifica che, se non altro, dovrebbe portare le persone a sviluppare una metodica razionale nella gestione della vita quotidiana, metodica della quale moltissimi avrebbero un gran bisogno[29]. Dovendo però accettare la realtà per come essa è, occorre constatare che un simile progetto sembra irrealizzabile per la mancanza d'insegnanti capaci di portarlo avanti, di strutture, di programmi e di libri di testo accettabili. Volendo si potrebbe immaginare una strategia per formare insegnanti di questo tipo, o per qualificare quelli che già ci sono, e non sarebbe difficilissimo cambiare gradualmente i programmi della scuola e i libri di testo[30]. C'è però un'altra obiezione estremamente acuta e forte. Me l'ha fatta il Professor Giorgio Longhi che talvolta incontro per strada in quanto abita vicino a mia mamma. Ha ascoltato quel che stavo insegnando a Compiobbi e mi ha creduto perché anche lui ha avuto modo di rendersi conto delle potenzialità degli adolescenti. Ma mi ha anche fatto comprendere che, nell'attuale contesto geopolitico internazionale guidato dagli USA, un paese come l'Italia sta sempre più abdicando alle proprie velleità nel campo della ricerca di base e in quello dello sviluppo tecnologico. Tale processo è iniziato con lo sfascio della scuola, lo smantellamento dell'elettronica italiana e del nucleare e sta proseguendo irreversibilmente. Quindi, mi ha detto Longhi, io posso benissimo costruire una classe di geni creativi ma questi ragazzini si scontreranno con un liceo scientifico non all'altezza delle aspettative da me indotte e così via. Quindi corro il rischio di creare una classe di disadattati. Ho molto riflettuto, profondamente e per settimane, su quel che mi ha detto Longhi e mi sono reso conto che ha ragione. Allora ho preso la più lucida delle decisioni possibili: fare il concorso per preside, cosa che non era nei miei progetti. Se lo vincerò avrò la possibilità di formare una scuola di disadattati, perché una sola classe non è che una goccia d'acqua nell'oceano. Il passo successivo sarà fare il concorso per provveditore agli studi, perché una sola scuola di disadattati è insufficiente. Se questa è la realtà, per cambiarla l'unica strada percorribile è quella di aumentare il numero dei disadattati secondo la sana successione $2^n$. Non vedo altro modo.

Un carissimo saluto e un augurio di buone vacanze.

ANZ.

Anz.

[27] Sulle capacità di apprendimento delle lingue ci sono ottimi libri fra i quali spiccano quelli dell'eminente linguista americano Noam Chomsky, di cui sono un accanito lettore perché, pur trattandosi di testi accademici, sono chiarissimi, se uno ha una formazione matematica. In qualche senso sono testi di matematica, per questo li leggo. Ho cercato per anni qualcosa del genere sull'apprendimento della matematica. L'unico libro degno di menzione che ho trovato è un testo semidivulgativo: *Il pallino della matematica* di S. Dehaene ed. Mondadori (2000). Però Chomsky è un'altra cosa. Mi sono anche informato in giro e ho ricavato l'idea che la ricerca nel campo dell'apprendimento della matematica stia muovendo i primi passi.

[28] E' facile immaginare che Beilinson, per dimostrare il Teorema di Beilinson all'età in cui l'ha dimostrato, già a 12 anni si doveva alzare dal letto, diagonalizzare un paio di endomorfismi, fare colazione e andare all'università. Essendo però troppo piccolo per dedicarsi anche alla diagonalizzazione delle studentesse universitarie, il poverino doveva essere costretto a studiare indefessamente i politopi e la coomologia. Non oso poi immaginare la storia del tipo che ha steso la congettura di Poincaré.

[29] Io ho tratto un grande giovamento dai miei studi di matematica, pur essendo un disadattato totale & irrecuperabile. Infatti, passo dopo passo, con lucido raziocinio, sono riuscito a costruirmi una qualità della vita scandalosa, che mi viene ferocemente invidiata da quasi tutti quelli che hanno a che fare con me. Soprattutto dai non disadattati.

[30] In realtà i libri di testo ci sarebbero, basta fare un tuffo nel passato. Devi sapere che a Vinci, nell'insegnare scienze, venivo tartassato dagli alunni extracomunitari con domande assai concrete su come funziona un motore oppure un impianto elettrico. Essendo io un drogato dei libri mi ero messo ad acquistare, da un robivecchi di Empoli, testi degli anni '20 finalizzati alla formazione degli apprendisti operai. Ma in quegli anni li gli apprendisti erano appena usciti dalla scuola elementare. Questi libri, quindi, hanno la stessa mia finalità: insegnare roba complicata a dei mezzi bambini. Io ne faccio un grande uso: sono i miei veri testi scolastici di riferimento. Te ne segnalo uno: *Procedimenti, Mezzi e Strumenti di Calcolo* di T. Jervis ed. Lavagnolo (1928). E' avveniristico!