Curriculum Scientifico di Emanuele Paolini

Dati personali:

Emanuele Paolini
nato a Udine, nel 1973
residente in via delle Torri 13D, 56124 Pisa
tel.: 050 598 600
Recapito:
Dipartimento di Matematica "U. Dini"
viale Morgagni 67a, 50134 Firenze
tel.: 055 4237 143, fax: 055 4222 695
e.mail: `paolini@math.unifi.it`
web: `http://www.math.unifi.it/users/paolini/`

Formazione scientifica:

Primo posto alle olimpiadi nazionali di matematica, Cesenatico 1991.

Maturità scientifica presso il liceo G. Bertoni, Udine 1992.

Vincitore di un posto per il corso ordinario alla Scuola Normale Superiore di Pisa e iscrizione al corso di Matematica dell'Università di Pisa, 1992.

Laurea in Matematica presso l'Università di Pisa.
Data: 24 ottobre 1996. Votazione: 110/110 e lode.
Titolo della tesi: "Il teorema del disco topologico di Reifenberg ed il problema di Plateau in codimensione qualunque".
Relatore: Prof. M. Giaquinta, controrelatore: Prof. L. Ambrosio.

Diploma di licenza in Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.
Data: 27 ottobre 1997. Votazione: 70/70 e lode.

Vincitore di un posto per il corso di Perfezionamento alla Scuola Normale Superiore di Pisa da gennaio 1997. A settembre 2000 rinuncia al posto da perfezionando dopo aver vinto il posto da ricercatore all'Università di Firenze. Mantiene comunque la possibilità di discutere la tesi di perfezionamento.

Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica "U. Dini" dell'Università di Firenze dal settembre 2000 a oggi.

Seminari e comunicazioni tenute:

"Superfici minime e superfici con curvatura assegnata". Levico Terme, 21 aprile 1998.

"Il teorema del disco topologico di Reifenberg". Dipartimento di matematica dell'Università di Trento, 13 maggio 1998.

"Regolarità per funzionali 1-omogenei: un esempio". Levico, 28 marzo 2001.

"On the relaxed total variation of singular maps". Workshop "Recent Advances in Calculus of Variations and PDE's", Pisa, 7–9 novembre 2002.

"Variazione totale di mappe singolari". Dipartimento di matematica dell'Università di Lecce, luglio 2003.

"Reti di trasporto ottimale", Levico, 2004.

“Reti di trasporto ottimale” Dipartimento di matematica dell’Università di Lecce, 6 luglio 2004.

“Reti di trasporto tramite flat chains”. Convegno “giornate di lavoro su questioni di Teoria Geometrica della Misura e Calcolo delle Variazioni” Levico Terme, 2005.

“On the relaxed total variation of singular maps”. Convegno “New Trends in Partial Differential Equations and Calculus of Variations” Cortona, 6–12 maggio 2007.

“How to solve a PDE inclusion using origami”. Seminario su invito. EPFL Lausanne, 20 giugno 2007.

“Mappe rigide e origami: il problema di Dirichlet per mappe con gradiente ortogonale”. “XVIII Convegno Nazionale di Calcolo delle Variazioni’ Levico Terme, 10–15 febbraio 2008.

Attività didattica:

1997-98: Esercitazioni per il corso di *Analisi II* tenuto dal prof. L. Modica per il CdL in Informatica, Università di Pisa

1998-99: Esercitazioni per il corso di *Analisi I* tenuto dal prof. M. Giaquinta per il CdL in Fisica, Università di Pisa

1999-2000: Tutorato per il corso di *Analisi* tenuto dal prof. M. Giaquinta, Scuola Normale Superiore di Pisa

1999-2000: Esercitazioni per il corso di *Matematica per l’Ingegneria* tenuto dalla prof. P. Conti per il CdL in Ingegneria Meccanica e Biomedica, Università di Pisa

2000-01: Esercitazioni per il corso di *Matematica I* tenuto dalla prof. G. Papi per il CdL in Biologia, Università di Firenze

2001-02: Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica 2* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze

2002-03, 2004-05 e 2006-07: Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica I e II modulo* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze

2003-04, 2005-06 e 2007-08: Esercitazioni per il corso di *Analisi Matematica III e IV modulo* tenuto dal prof. P. Marcellini per il CdL in Matematica, Università di Firenze

2003-04, 2004-05, 2005-06, 2006-07 e 2007-08: *Laboratorio Multimediale* per il CdL in Matematica, Università di Firenze

2004-05: *Calcolo delle Variazioni II modulo* tenuto insieme al dott. M. Focardi, per il CdL specialistica in Matematica, Università di Firenze

Altre attività:

Progettazione, programmazione e gestione del *Preprint Server* `http://cvgmt.sns.it/`.

Pubblicazioni scientifiche:

[1] E. Paolini: *Il teorema del disco topologico di Reifenberg ed il problema di Plateau in dimensione qualunque*, tesi di laurea, Università di Pisa, 1996.

[2] E. Paolini: *Regularity for minimal boundaries with mean curvature in L^n*, Manuscripta Math. Vol. 97, pagg. 15–35, 1998.

[3] M. Novaga - E. Paolini: *A computational approach to fractures in crystal growth*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl., Vol. 10, pagg. 47–56, 1999.

[4] L. Ambrosio - E. Paolini: *Partial regularity for quasi minimizers of perimeter*, Ricerche Mat. Vol. 48, pagg. 167–186, 1999. *Errata-corrige:* Ricerche Mat. Vol. 50, pagg. 191–193, 2001.

[5] L. Ambrosio - M. Novaga - E. Paolini: *Some regularity results for minimal crystals*, ESAIM: Control Optim. Calc. Var., Vol. 8, pagg. 69–103, 2002.

[6] M. Novaga - E. Paolini: *Regularity results for boundaries in $\mathbf{R}^2$ with prescribed anisotropic curvature*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 184, N. 2, pagg. 239–261, 2005.

[7] M. Novaga - E. Paolini: *Regularity results for some 1-homogeneous functionals*, Nonlinear Anal. Real World Appl. Vol. 3, N. 4, pagg. 555–566, 2002.

[8] E. Paolini: *On the Relaxed Total Variation of Singular Maps*, Manuscripta Math. Vol. 111, N. 4, pagg. 499–512, 2003.

[9] M. Miranda, E. Paolini, E. Stepanov: *On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets*, Calc. Var. Partial Diff. Equations Vol. 27, N. 3, Pagg. 287–309, 2006.

[10] E. Paolini, E. Stepanov: *Qualitative properties of maximum distance and average distance minimizers in $\mathbf{R}^n$*, Journal of Mathematical Sciences Vol. 122, N. 3, pagg. 3290–3309, 2004.

[11] M. Novaga, E. Paolini: *Stability of Crystalline Evolutions* Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 15, N. 6, pagg. 921–937, 2005.

[12] G. Bellettini, M. Novaga, E. Paolini: *Global Solutions to the Gradient Flow Equation of a Nonconvex Functional*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 37, N. 5, pagg. 1657–1687, 2006.

[13] E. Paolini, E. Stepanov: *Optimal transportation networks as flat chains*, Interfaces and Free Boundaries, N. 4, pagg. 393–436, 2006

[14] E. Paolini, E. Stepanov: *Connecting measures by means of branched transportation networks at finite cost* (preprint: `http://cvgmt.sns.it/papers/paoste06/`)

[15] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *An explicit solution to a system of implicit differential equations* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. 25, N. 1, pagg. 163–171, 2008.

[16] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *Lipschitz-continuous local isometric immersions: rigid maps and origami* J. Math. Pures Appl. N. 90, pagg. 66–81, 2008

[17] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini: *On the n-dimensional Dirichlet problem for maps with orthogonal gradient* (submitted)

[18] G. De Philippis, E. Paolini: *A short proof of the minimality of Simons cone* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (to appear)

Attività di ricerca:

L'attività di ricerca si sviluppa principalmente nell'ambito della *teoria geometrica della misura* e del *calcolo delle variazioni*. In particolare possiamo individuare i seguenti filoni di ricerca.

- Regolarità per superfici minime, ω-minime e con curvatura assegnata [1] [2] [4] [18].
- Regolarità in spazi anisotropi [5] [6].
- Variazione totale anisotropa [7].
- Approccio computazionale allo studio di equazioni di evoluzione [3] [12].
- Il determinante Jacobiano [8], mappe rigide [15] [16] [17].
- Reti ottimali di trasporto urbano [9] [10] [13] [14].

I riferimenti tra parentesi quadre si riferiscono agli articoli elencati nella precedente sezione "Elenco Pubblicazioni". I riferimenti tra parentesi tonde si riferiscono agli articoli specificati nelle note a piè pagina.

Regolarità per superfici minime, ω-minime e con curvatura assegnata.

Le superfici minime sono superfici che risolvono il problema di Plateau, ovvero sono superfici che hanno area minima tra tutte le superfici con un certo bordo assegnato. Il problema di Plateau in dimensione qualunque è stato risolto negli anni '60 indipentemente e con tre approcci diversi da: Federer, De Giorgi e Reifenberg. I metodi di Federer e De Giorgi hanno avuto molte estensioni, e hanno originato rispettivamente la teoria delle *Correnti Rettificabili* e la teoria degli *Insiemi di Perimetro Finito*. L'approccio di Reifenberg, essendo invece più complesso e involuto, è rimasto per lo più sconosciuto (lasciando il posto alla teoria dei *varifolds*).

In tutti questi approcci il problema di esistenza dei minimi viene affrontato ampliando la classe delle superfici in modo da ottenere uno spazio sufficientemente ampio da garantire la compattezza necessaria per mostrare l'esistenza del minimo. Per risolvere il problema originario bisogna però dimostrare che i minimi sono, in realtà, superfici regolari in senso classico. Risultati di questo genere vengono chiamati *risultati di regolarità* e sono l'argomento principale trattato in questa sezione.

Nella Tesi di Laurea [1] viene studiato l'articolo di Reifenberg ([1]) sulla regolarità delle superfici minime per il problema di Plateau. Questo articolo è molto interessante in quanto contiene una definizione di tipo algebrico-topologico della classe di superfici ammissibili. Inoltre di particolare interesse risulta essere uno degli strumenti utilizzati in tale articolo: il *teorema del disco topologico*. Questo teorema garantisce l'esistenza di una parametrizzazione continua per una superficie (in [1] si mostra che tale parametrizzazione è Hölderiana) quando la superficie stessa verifica una condizione di "piattezza a tutte le scale" (condizione ϵ, R di Reifenberg).

L'intera tecnica usata da Reifenberg viene generalizzata in [2] per provare che si ha regolarità $C^{0,\alpha}$ per le frontiere in $\mathbb{R}^n$ ($n < 8$) con curvatura media assegnata $H \in L^n(\Omega)$, cioè per il bordo degli insiemi di Caccioppoli $E \subset \mathbb{R}^n$ che minimizzano il funzionale

$$F_H(E, \Omega) = P(E, \Omega) - \frac{1}{n-1} \int_{E\cap\Omega} H(x)\, dx$$

dove $P(E, \Omega)$ è il perimetro dell'insieme E ristretto all'aperto Ω. Sugli insiemi sufficientemente regolari sappiamo che $P(E, \Omega)$ è l'area della superficie $n-1$ dimensionale $\partial E \cap \Omega$ e se $x \in \partial E$ la quantità $H(x)$ risulta essere la curvatura media della superficie ∂E nel punto x.

[1] E.R. Reifenberg: "Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type", *Acta Math.* **104** 1960

Ricordiamo che nel caso in cui $H \in L^p$, $p > n$ i minimi di F_H sono regolari di classe $C^{1,\alpha}$ ([2]) mentre nel caso limite $p = n$ studiato in [2] la superficie minimizzante può effettivamente avere dei punti in cui non esiste il piano tangente ([3]).

In [4] si cerca invece di seguire le tecniche di regolarità di De Giorgi mostrando in particolare che il teorema di *decadimento dell'eccesso* ([4]) permette di applicare il *teorema del disco topologico* di Reifenberg. Con questa tecnica si estende la regolarità Hölderiana ottenuta in [2] anche per $n \geq 8$ ammettendo però, come per le superfici minime, singolarità di dimensione $n - 7$ (regolarità parziale). Tale risultato viene inoltre dimostrato nell'ambito più generale degli ω-*minimi* ovvero delle frontiere di insiemi E che verificano una proprietà del tipo

$$P(E, B_\rho) \leq (1 + \omega(\rho))P(F, B_\rho)$$

dove F è una variazione di E in B_ρ e ω è una qualunque funzione infinitesima.

Sempre in [4] si mostra anche che nel caso $n = 2$ (cioè per curve nel piano) si ha regolarità lipschitziana (questo risultato era stato congetturato da De Giorgi).

In [18] viene presentata una dimostrazione semplificata del famoso risultato ([5]) di esistenza di una superficie minima singolare (il cono di Simons). Invece di utilizzare le *calibrazioni* (campi vettoriali unitari che estendono il versore normale alla superficie con divergenza nulla), questa dimostrazione utilizza *sub-calibrazioni* cioè campi con divergenza non positiva invece che nulla. Risulta quindi molto più facile trovare le sub-calibrazioni che, si dimostra, sono comunque sufficienti a stabilire la minimalità di una superficie.

Regolarità in spazi anisotropi

Con "spazio anisotropo" intendiamo uno spazio di Banach reale $(X, \|\cdot\|)$ di dimensione finita dotato di una norma non euclidea. In particolare X è isomorfo a $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale, ma non come spazio metrico. La palla unitaria di questo spazio viene chiamata *Wulff shape*. Quando la *Wulff shape* è un poliedro questi spazi vengono usualmente chiamati "cristallini" in quanto intervengono in maniera naturale nello studio dei cristalli. La palla unitaria dello spazio duale X^* viene chiamata *Frank diagram*. Ci sono molte difficoltà supplementari nello studio di questi spazi anisotropi rispetto all'usuale spazio euclideo soprattutto nei casi in cui la *Wulff shape* non è differenziabile (presenta degli spigoli) oppure non è strettamente convessa (presenta delle parti piatte).

In [5] vengono studiati i minimi (e gli ω-minimi) del perimetro in uno spazio anisotropo. In questo ambito viene dapprima data una definizione intrinseca di perimetro mostrando che tale definizione è equivalente alle altre definizioni di perimetro anisotropo presenti in letteratura. Si estende quindi il concetto di *frontiera ridotta* mostrando che il teorema di rettificabilità (De Giorgi, Federer) continua a valere. Questo permette anche di dare un teorema di rappresentazione del perimetro anisotropo tramite la misura di Hausdorff. Viene quindi introdotto il concetto di *eccesso* e si riesce a dimostrare che la frontiera di insiemi con eccesso *piccolo* è lipschitziana al di fuori di una parte di misura *piccola*.

Si nota inoltre che gli insiemi con eccesso nullo sono superfici la cui normale appartiene sempre ad una stessa faccia del *Frank Diagram*. Se il *Frank Diagram* è strettamente convesso le sue facce sono singoli punti, la normale risulta quindi fissata e gli insiemi di eccesso nullo sono quindi dei piani. Se invece il *Frank Diagram* ha

[2] U. Massari: "Esistenza e Regolarità delle Ipersuperfici di Curvatura Media Assegnata" *Arch. Rat. Mech. Anal.* **55** 1974

[3] E. Barozzi - E. Gonzalez - I. Tamanini: "The mean curvature of a set of finite perimeter" *Proc. Amer. Math. Soc.* **99** 1987

[4] L. Ambrosio - D. Pallara: "Partial regularity of free discontinuity sets, I" *Annali Scuola Normale Sup. Pisa* **24** 1997

[5] Bombieri - De Giorgi - Giusti: "Minimal cones and the Bernstein problem" *inventiones math.* **7** 1969

delle parti piatte (come ad esempio nel caso cristallino) gli insiemi di eccesso nullo possono non essere dei piani. Notiamo infine che gli insiemi con eccesso nullo sono minimi del perimetro (superfici minime anisotrope) e nel caso in cui il *Frank Diagram* non sia strettamente convesso esistono dunque superfici minime con regolarità solo lipschitziana (e non di classe C^1 come nel caso euclideo).

In questo contesto un teorema di *decadimento dell'eccesso* (se l'eccesso è sufficientemente piccolo in una certa sfera allora tende a zero nelle sfere più piccole) viene ottenuto nel caso $n = 2$ (curve nel piano). Il decadimento dell'eccesso garantisce (come nel caso euclideo) la regolarità lipschitziana delle frontiere minime e ω-minime.

In definitiva in [5] si ottiene la regolarità lipschitziana (che come abbiamo ricordato è il massimo che si puó ottenere nel contesto anisotropo) per le frontiere minime e ω-minime del perimetro anisotropo in $\mathbb{R}^2$. Si evidenzia anche il fatto che esistono due casi particolarissimi (quando la *Wulff shape* è un quadrilatero o un triangolo) in cui la regolarità lipschitziana è solo parziale in quanto ci può essere un insieme singolare di misura nulla.

In [6] viene approfondito lo studio delle frontiere degli ω-minimi anisotropi nel caso $n = 2$. Le tecniche usate si basano sulla possibilità di decomporre gli insiemi di perimetro finito in una successione di insiemi semplicemente connessi inscatolati l'uno nell'altro ([6]) e nello sfruttare il teorema di Jordan sulle curve semplici chiuse per ottenere una parametrizzazione della curva di bordo. Con questi strumenti si classificano tutti i minimi globali del perimetro (ovvero i minimi definiti su tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$) e si evidenzia come questi minimi *globali* hanno una sola singolarità (quando la *Wulff shape* è un quadrilatero) o al massimo due (quando la *Wulff shape* è un triangolo). In [5] si era già osservato che negli altri casi (*Wulff shape* diversa da quadrilatero o triangolo) non ci possono essere singolarità.

Successivamente (sempre in [6]) si studiano gli insiemi con curvatura assegnata costante. Nel caso euclideo (sempre per $n = 2$) è noto che la frontiera di insiemi siffatti è formata da archi di cerchio: un risultato analogo si ottiene in questo contesto anisotropo dove, al posto degli archi di cerchio si ottengono archi della frontiera della *Wulff shape*.

La variazione totale anisotropa

I risultati di regolarità ottenuti in [5] e [6] ci permettono in [7] di ottenere informazioni sui minimi locali del funzionale

$$F_\varphi(u) = \int_\Omega \varphi(Du)$$

dove φ è una norma (anche non strettamente convessa) e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Lo studio di questo particolare funzionale può essere di un certo interesse in quanto è un caso in cui la funzione integranda non è strettamente convessa e ha crescita lineare e quindi gli usuali metodi del calcolo delle variazioni non si applicano. Nel caso in cui φ sia la norma euclidea questo funzionale è già stato studiato da Miranda ([7]) il quale ha messo in evidenza i forti legami con gli insiemi di perimetro minimo: i sottolivelli di un minimo u risultano infatti essere insiemi con frontiera minima. Miranda trova una condizione sul dato al bordo di u che garantisce l'esistenza di un minimo lipschitziano. Come conseguenza trova delle condizioni per garantire l'unicità delle superfici di area minima con un certo bordo fissato.

In [7] l'approccio è rovesciato in quanto le informazioni sugli insiemi di perimetro (anisotropo) minimo ci permettono di avere informazioni sui minimi del funzionale.

[6]L. Ambrosio - V. Caselles - S. Masnou - J. M. Morel: "Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing" *Journal of EMS* 1999

[7]M. Miranda: "Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili" *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **19** 1965

Lo spazio di competizione in cui viene studiato il minimo è quello delle funzioni a variazione limitata BV. In questo spazio è facile dare semplici condizione per l'esistenza dei minimi, e si considera quindi il problema della regolarità degli stessi. Viene individuata una proprietà della norma φ detta *fatness* che garantisce che il bordo del sottografico dei minimi u di F_φ sia localmente un grafico lipschitziano. Notiamo che questo non significa che la funzione u stessa sia localmente lipschitziana. Anzi tipicamente i minimi potranno avere delle parti di salto; in tal caso il bordo del sottografico comprende anche la parte verticale del salto e può essere visto come grafico di una funzione lipschitziana solo ruotando gli assi coordinati. Si nota infine come la condizione di *fatness* della norma φ sia necessaria per ottenere un risultato di questo tipo. In caso contrario, infatti, viene esibito un esempio di minimo il cui bordo del sottografico su un insieme denso di punti non è localmente grafico in alcuna direzione.

Equazioni di evoluzione

L'evoluzione per curvatura media di un insieme può essere considerata l'evoluzione, lungo la curva di massima discesa, del funzionale perimetro. È noto infatti che calcolando la variazione prima del perimetro di un insieme regolare si ottiene la curvatura media della sua frontiera.

Se si utilizza il perimetro cristallino al posto del perimetro euclideo si ottiene l'evoluzione per curvatura media anisotropa, che risulta essere strettamente legata ai fenomeni fisici di *crescita dei cristalli.*

Solo recentemente ([8]) si è scoperto che durante l'evoluzione di un poliedro le facce non si muovono parallelamente a se stesse ma possono, in certi casi, incurvarsi (facendo uscire l'insieme dalla classe dei poliedri) o spezzarsi (facendo cambiare all'insieme il numero delle facce).

Il lavoro [3] presenta un algoritmo numerico, basato sul metodo degli elementi finiti, per determinare la posizione delle eventuali fratture nelle faccie dei cristalli che si evolvono per curvatura media.

Un'altra particolarità scoperta di recente nell'evoluzione dei cristalli ([9]) è la possibilità che l'evoluzione della *Wulff shape* sia instabile. È ben noto che la *Wulff shape* evolve rimpicciolendosi ma rimanendo sempre simile a sè stessa così come nel caso euclideo la sfera rimane tale durante l'evoluzione per curvatura media. Se si effettua un riscalamento della superficie in modo che il volume rimanga costante durante l'evoluzione, si noterà come nel caso euclideo la forma della superficie tenda sempre a diventare una sfera anche se vengono effettuate piccole perturbazioni all'evoluzione. Nel caso cristallino può invece succedere che piccole perturbazioni del cristallo iniziale modifichino completamente l'esito dell'evoluzione, portando il cristallo a schiacciarsi in una o più direzioni.

In [11] si è implementato un algoritmo numerico che permette di decidere quali poliedri risultano stabili e quali no. L'evoluzione di un poliedro con N facce viene ricondotto ad un sistema di N equazioni differenziali ordinarie. La rinormalizzazione dell'evoluzione (a meno di traslazioni e omotetie) corrisponde ad una proiezione della soluzione $x(t) \in \mathbb{R}^N$ su una varietà $N-4$ dimensionale in R^N. Si osserva come la rinormalizzazione della soluzione sia a sua volta la soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, che va studiato intorno ad un suo punto critico. Per fare questo il sistema viene linearizzato e viene calcolata la matrice corrispondente. I coefficienti di questa matrice vengono esplicitati in lunghe espressioni che coinvolgono i parametri della geometria della Wulff shape. Viene quindi implemen-

[8] G. Bellettini - M. Novaga - M. Paolini: "Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature" *Interfaces and Free Boundaries* 1999

[9] M. Paolini - F. Pasquarelli: "Unstable Crystalline Wulff Shapes in 3D", *Proceedings Variational methods for discontinuous structures, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* (2002)

tato un algoritmo per il calcolo di questi parametri con i quali si può facilmente determinare la stabilità della Wulff-Shape.

In [12] viene studiato il *gradient-flow* del funzionale

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u_x)\,dx$$

dove u è una funzione BV definita su $(0,1)$ e

$$\phi(\xi) = \max\{\xi^2, 1\}.$$

Osserviamo che in generale i problemi di evoluzione per funzionali non convessi, possono portare a equazioni *malposte* come ad esempio l'equazione del calore *backward*. In questo caso l'equazione formale corrispondente è

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{dove } |u_x| < 1 \\ u_y = 0 & \text{dove } |u_x| > 1. \end{cases} \tag{1}$$

L'equazione di evoluzione viene risolta mediante un metodo di discretizzazione spaziale, con il quale si scopre che l'evoluzione, pur soddisfando le equazioni (1), presenta un'evoluzione dell'interfaccia $|u_x| = 1$ che ci porta ad un problema di frontiera libera.

Il determinante Jacobiano

Consideriamo il seguente funzionale (variazione totale) definito su mappe $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$TV(u) = \int_\Omega |\det Du(x)|\,dx.$$

Questo funzionale è continuo sullo spazio di funzioni $W^{1,n}$ ma nelle applicazioni (ad esempio nella teoria dell'elasticità) è utile estendere il suo dominio a funzioni come $u(x) = x/|x|$ che stanno in $W^{1,p}$ per ogni $p < n$ ma non in $W^{1,n}$.

Una possibile estensione del funzionale $TV\colon W^{1,n} \to \mathbb{R}$ ad un funzionale $TV^p\colon W^{1,p} \to \mathbb{R}$ con $p < n$ si può dare per *rilassamento*:

$$TV^p(u) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} TV(u_k)\colon u_k \overset{W^{1,p}}{\rightharpoonup} u, u_k \in W^{1,n}\}.$$

In [8] vengono presentati alcuni risultati che permettono di calcolare il funzionale TV^p sulle mappe 1-omogenee. Questo lavoro trae ispirazione e si basa su un recente articolo di Fonseca, Fusco e Marcellini ([10]) dove il funzionale TV^p viene introdotto.

Data una funzione lipschitziana $\varphi\colon \partial\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ consideriamo l'estensione 1-omogenea $u\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$

$$u_\varphi(x) = \varphi(x/|x|).$$

Mappe di questo tipo sono molto rilevanti in quanto sono il prototipo di mappe con singolarità isolate. In particolare in [8] viene calcolato TV^p (per $p \in (n-1, n)$) in due casi importanti.

Il primo caso è quello delle mappe u_φ con $\varphi(\partial\mathbb{B}^n) \subset \partial\mathbb{B}^n$: in questo caso si trova che

$$TV^p(u) = |\deg\varphi| \cdot |\mathbb{B}^n|$$

dove $\deg\varphi$ è il grado topologico della mappa $\varphi\colon \partial\mathbb{B}^n \to \partial\mathbb{B}^n$. Questo risultato era stato congetturato da Fonseca Fusco e Marcellini (i quali lo dimostrano nel caso $n = 2$).

[10] I. Fonseca- N. Fusco - P. Marcellini: "On Total Variation of the Jacobian", preprint Dip. Mat. Univ. Firenze

Il secondo caso rilevante è quello della mappa $\bar{u} = u_{\bar{\varphi}}$ dove $\bar{\varphi}\colon \partial\mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una particolare curva che si avvolge lungo l'unione di due circonferenze tangenti l'una all'altra. Questa particolare funzione venne presa in considerazione in un importante articolo di Giaquinta, Modica e Souček ([11]) dove viene mostrato (in un contesto leggermente diverso) che $TV^p(\bar{u}) > 0$. Fonseca Fusco e Marcellini dimostrano anche che $TV^p(\bar{u}) \leq 4\pi$. In [8] viene mostrato che $TV^p(\bar{u}) = 2\pi$ (questo risultato è stato trovato indipendentemente da Mucci ([12]). Viene anche presentato un metodo generale per il calcolo di $TV^p(u_\varphi)$ da applicare quando φ è una qualunque curva del piano.

Reti ottimali di trasporto urbano

Il problema delle reti ottimali di trasporto urbano consiste nel trovale la disposizione ottimale di una rete di trasporto (pensiamo ad esempio alla linea di una metropolitana) in modo che ogni punto della città si trovi a breve distanza da un punto della rete.

Un modello molto semplice con cui si può schematizzare il problema è il seguente. Supponiamo che la densità di popolazione in una città sia rappresentato da una misura μ definita sul piano. La rete di trasporto viene rappresentata invece da un insieme compatto connesso $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ di lunghezza (misura di Hausdorff 1-dimensionale) finita. La distanza p-media della popolazione dalla linea di trasporto è data dal seguente funzionale

$$F_p(\Sigma) = \int (d(x,\Sigma))^p \, d\mu(x).$$

Supponendo che la spesa per la costruzione di una rete di trasporto Σ sia proporzionale a $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ (la lunghezza di Σ) ed avendo a disposizione un *budget* sufficiente alla costruzione di una linea di lunghezza L, è sensato considerare come *ottimali* gli insiemi Σ che minimizzano F_p tra tutti gli insiemi compatti, connessi e di lunghezza minore o uguale ad L.

Questo problema è stato affrontato recentemente da G. Buttazzo e E. Stepanov ([13]) i quali trovano alcune proprietà possedute dagli insiemi ottimali Σ: l'insieme è topologicamente un grafo (non contiene cicli), e in ogni vertice convengono al più tre curve diverse; inoltre l'insieme ottimale è *Ahlfors*-regolare (una nozione molto debole di regolarità) ed in particolare è uniformemente rettificabile.

In [9] vengono studiati i minimi del Γ-limite F_∞ dei funzionali F_p quando $p \to \infty$. È facile verificare che

$$F_\infty(\Sigma) = \inf_{x\in M} d(x,\Sigma)$$

dove M è il supporto della misura μ.

Osserviamo che il parametro p ha un certo significato sociologico. Mentre per $p = 1$ o più in generale per $p > 1$ il benessere sociale si misura con una media sui cittadini, per $p = \infty$ la società migliore è quella in cui si massimizza il benessere di chi sta peggio.

I minimi del funzionale con $p = \infty$ sono decisamente più difficili da studiare rispetto ai funzionali F_p. In particolare se si considera un minimo Σ_0 tra tutti i compatti connessi di lunghezza $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq L$ non si riesce neppure a dimostrare che $\mathcal{H}^1(\Sigma_0) = L$. Nonostante questo, utilizzando un approccio piuttosto diverso da quello usato per $p < +\infty$, si riescono ad ottenere alcuni interessanti risultati sulla struttura dei minimi di F_∞ che sono rappresentabili come limite di minimi di F_p

[11] M. Giaquinta - G. Modica - J. Souček: "Graphs of finite mass which cannot be approximated in area by smooth graphs" *Manuscripta Math.* 1993

[12] D. Mucci: "Remarks on the Total Variation of the Jacobian" preprint 2002

[13] G. Buttazzo - E. Stepanov: "Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem" preprint 2003

per $p \to \infty$. Questi minimi *speciali* hanno infatti una struttura molto rigida che permette di ottenere alcune informazioni di regolarità che non erano disponibili per i minimi del funzionale F_p. Inoltre sembra ora possibile riuscire a trovare esplicitamente l'insieme ottimale in alcuni casi semplici (ad esempio quando M è un cerchio).

Mappe rigide

In [15], [16] e [17] si è preso in considerazione lo studio dell'inclusione differenziale con condizioni di Dirichlet

$$\begin{cases} Du \in O(n) & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove u è una mappa lipschitziana definita su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$ e $O(n)$ è il gruppo delle matrici ortogonali. Esplicitando la condizione $Du \in O(n)$ come $Du^t Du = Id$ si nota come l'inclusione differenziale possa essere riscritta come un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali.

Il problema in questione è il prototipo delle *equazioni alle derivate parziali di tipo implicito* studiate in ([14]) e l'approccio utilizzato segue ([15]) nel trovare soluzioni esplicite a tale inclusione.

Osserviamo che l'inclusione $Du \in O(n)$ è la naturale estensione dell'equazione eiconale $|\nabla u| = 1$ al caso di mappe vettoriali. Le soluzioni di questa equazione vengono chiamate *mappe rigide* e viene messo in evidenza un chiaro legame con le costruzioni geometriche degli *origami* (l'antica arte giapponese di piegare la carta). In particolare vengono isolati dei risultati che ci permettono di ricostruire una mappa rigida a partire dal suo insieme singolare, ovvero dall'insieme Σ dei punti in cui u non è differenziabile. L'analogia con gli origami è data dal fatto che se Ω rappresenta un foglio di carta ($n = 2$ in questo caso), allora Σ rappresenta il diagramma delle pieghe sul foglio. Questo diagramma non può essere arbitrario, ma deve soddisfare alcune condizioni (tra cui la condizione di Kawasaki, nota nello studio degli origami) che si dimostrano essere sufficienti alla ricostruzione, unica, della mappa originale u.

Firenze, 20 giugno 2006 — Emanuele Paolini

[14]Dacorogna - Marcellini *Implicit Partial Differential Equations*, Birkhasuer, 1999.
[15]Cellina - Perrotta: *On a problem of potential wells* **J. Convex. Anal.** 1995.