Laboratorio di Bioinformatica

Lezione di Probabilità e Statistica

CENNI DI CALCOLO COMBINATORIO

Dott. Giovanni Cupini

Fattoriale

Definizione

Sia $n \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si definisce "n fattoriale", e si indica $n!$, così:

$0! = 1$.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$

Ad esempio:

$1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $10! = 3628800$;

$20! \simeq 2{,}433 \times 10^{18}$; $40! \simeq 8{,}159 \times 10^{47}$.

$n!$ cresce molto rapidamente con il crescere di n.

Alcune osservazioni e esempi

$n! = n(n-1)!$; se $n > k$; $\frac{n!}{k!} = n(n-1)\cdots(k+1)$

$\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$; $(3!)^2 \neq (3^2)!$; $(3!)! \neq 3^2!$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7!}{3!}$.

Coefficiente binomiale

Definizione

Siano $n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $n \geq k$.

Si definisce "coefficiente binomiale n su k", e si scrive $\binom{n}{k}$, il numero

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Osserviamo che

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 ; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Perché chiamare $\binom{n}{k}$ coefficiente binomiale?

Vale che se $a, b \in \mathbb{R}$ allora

$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 \cdot b^0 = 1$;

$$(a+b) = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Più in generale, il binomio $a+b$ elevato a n si sviluppa così:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Sorge un problema: determinare i coefficienti binomiali in modo sufficientemente rapido: ci viene in soccorso il "Triangolo di Tartaglia" (noto anche come "Triangolo di Pascal").

Esso sfrutta la proprietà che

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

per cui si possono ricavare i coefficienti di $(a+b)^{n+1}$ utilizzando quelli di $(a+b)^n$.

Il Triangolo di Tartaglia è

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . . . .

I numeri all'interno del triangolo si ottengono sommando il numero della stessa colonna ma nella fila sopra, con quello alla sinistra di quest'ultimo

es:

1
1 1
(1+2) 1
1 $\boxed{3}$ 3 1
1 4 (6+4) 1
1 5 10 $\boxed{10}$ 5 1
. . . . . .

che, utilizzando i coefficienti binomiali, si può scrivere anche così:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

. . . . . .

Pertanto, i coefficienti di $(a+b)^5$ si ottengono leggendo i valori della sesta riga del triangolo (quelli con i valori $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$ etc) da cui

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Poiché $1 = p + (1-p)$, si ha che $1 = (p+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Inoltre $(1+1)^n = 2^n$, ma anche $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ e quindi si deduce la uguaglianza notevole:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Permutazioni

Il fattoriale di un numero n ha un significato meno astratto. Supponiamo di avere 3 volumi di una enciclopedia (vol. 1, vol. 2, vol. 3) e di volerli disporre su uno scaffale. Quanti sono i modi di farlo? La risposta è $3!$

Infatti: $(1, 2, 3)$; $(2, 1, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(3, 2, 1)$
$(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$

Più in generale:

Dati n elementi distinti, si chiama <u>permutazione</u> degli n elementi ogni ordinamento di questi n elementi.

Il numero delle permutazioni di n elementi è $n!$.

Esempio:

I possibili ordini di arrivo di una gara di atletica con 8 concorrenti sono $8!$.

Esempio:

Quanti numeri di 4 cifre si possono scrivere con i simboli 1, 5, 9, 8 [non ripetendo mai le cifre in un numero: es: 1198 non è accettato]

Sono $4!$.

K-permutazione

Supponiamo ora di voler sapere quanti sono i possibili ordini di arrivo fino al 3° posto di una gara di atletica con 8 concorrenti. La risposta è

$$\frac{8!}{(8-3)!}$$

Più in generale:

Dati n elementi distinti, ci chiediamo in quanti modi possiamo ordinare K di questi oggetti. Il problema in più che sorge rispetto a prima è che non solo due ordinamenti sono diversi per l'ordine col quale sono elencati gli elementi, ma anche per la scelta dei K elementi.

Ogni ordinamento di questo tipo si chiama "disposizione semplice di n elementi su K posti". Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti su K posti è $\frac{n!}{(n-K)!}$

Esempio:

Da un mazzo di 52 carte estraggo una dopo l'altra 5 carte. Tenendo conto dell'ordine di estrazione, quanti sono gli esiti possibili?

Risp: $\frac{52!}{(52-5)!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$.

Esempio:

Da un mazzo di 52 carte estraggo contemporaneamente 5 carte. Quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto che qui non c'è un ordine di estrazione? Sono $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,(52-5)!}$

Sono quindi meno di prima, perché ad esempio 1 Fiori, 1 ♡, 2 ♡, 3 ◇, 4 ◇ non è distinguibile da 1 ♡, 2 ♡, 1 Fiori, 4 ◇, 3 ◇.

Più in generale:

Dati n elementi distinti, ci chiediamo quanti gruppi di k elementi possiamo fare, senza tenere conto dell'ordine. I gruppi sono in tutto $\binom{n}{k}$, e ciascun raggruppamento viene detto "combinazione semplice di n elementi su k posti".

Esempio:

Quanti sono i possibili ambi che si possono giocare su una ruota del lotto? $\binom{90}{2}$.

Disposizioni con ripetizione

Dati n elementi e k posti (ora k può essere anche maggiore o uguale a n) si chiamano disposizioni di n elementi su k posti con ripetizione i modi di ordinare, anche ripetendoli, gli n elementi fino a formare gruppi di k. Il numero delle disposizioni di n elementi su k posti con ripetizione è n^k.

Esempio:

Dati i tre elementi 1, X, 2, le disposizioni con ripetizione di questi elementi su 13 posti sono tutte le possibili colonne del totocalcio. In tutto 3^{13}.

Esempio:

Lancio due dadi, uno rosso e uno nero. Indico l'esito del lancio con una coppia di numeri da 1 a 6: il primo elemento della coppia è l'esito del dado rosso, il secondo è l'esito del dado nero.

Tutti gli esiti possibili, cioè il numero di tutte le coppie, è 6^2.

Combinazione con ripetizioni

Dati n elementi NON tutti distinti, di cui n_1 uguali fra loro, n_2 uguali fra loro, ..., n_k uguali fra loro. Si chiamano combinazioni con ripetizioni degli n elementi, gli allineamenti di questi n oggetti. Essi sono $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$

Esempio:

Gli anagrammi della parola MATEMATICA (anche senza senso), sono combinazioni di 10 elementi, di cui 2 (le M) uguali, 2 (le T) uguali e 3 (le A) uguali. Complessivamente, gli anagrammi sono $\dfrac{10!}{2!\,2!\,3!}$.

Esempio:

lancio una moneta 7 volte. In quanti modi posso avere 5 croci e due teste? È come contare gli anagrammi della parola ~~di~~ TTCCCCC, cioè in tutto $\dfrac{7!}{2!\,5!}$