

Prova scritta di Matematica II

Prof. Gloria Papi

A.A. 2001/2002 - 11 Luglio 2002

Compito N. 1

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 5e^{-5x} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di densità della variabile aleatoria $Y = (X - 3)^2$.

Esercizio 2. Una popolazione si evolve secondo la legge di dinamica delle popolazioni $y' = r(y)y$ con tasso di crescita $-y^2 + 1$. Sia $y(0) = 100$. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa la condizione iniziale. Determinare inoltre il valore x entro cui la popolazione si dimezza.

Esercizio 3. E' sabato sera. Raffaella è alla discoteca X con probabilità $2/3$ e al cinema multisala Y con probabilità $1/3$. Andrea ignora dove sia Raffaella e la va a cercare al cinema. Vi sono tre sale: nella sala A vi sono 20 persone, nella sala B vi sono 50 persone e nella C ve ne sono 30. Andrea non trova Raffaella nella sala A né nella B . Qual è la probabilità che Raffaella sia nella sala C ?

[Sugg: se \mathcal{C} è l'evento "Raffaella è nella sala C " e \mathcal{Y} è l'evento "Raffaella è al cinema", allora $P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C} \cap \mathcal{Y})$]

Esercizio 4. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$$

Determinare poi le soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato e studiarne la stabilità.

Prova scritta di Matematica II

Prof. Gloria Papi

A.A. 2001/2002 - 11 Luglio 2002

Compito N. 2

Esercizio 1. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = y + \sin t \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Determinare poi le soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato e studiarne la stabilità.

Esercizio 2. E' sabato sera. Elisabetta è alla discoteca X con probabilità $3/4$ e al cinema multisala Y con probabilità $1/4$. Paolo ignora dove sia Elisabetta e la va a cercare al cinema. Vi sono tre sale: nella sala A vi sono 30 persone, nella sala B vi sono 60 persone e nella C ve ne sono 10. Paolo non trova Elisabetta nella sala A né nella B. Qual è la probabilità che Elisabetta sia nella sala C?

[Sugg: se \mathcal{C} è l'evento "Elisabetta è nella sala C" e \mathcal{Y} è l'evento "Elisabetta è al cinema", allora $P(\mathcal{C}) = P(\mathcal{C} \cap \mathcal{Y})$]

Esercizio 3.

Sia X una variabile aleatoria avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 4e^{-4x} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di densità della variabile aleatoria $Y = (X - 5)^2$.

Esercizio 4. Una popolazione si evolve secondo la legge di dinamica delle popolazioni $y' = r(y)y$ con tasso di crescita $-y^2 + 9$. Sia $y(0) = 100$. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa la condizione iniziale. Determinare inoltre il valore x entro cui la popolazione si dimezza.