Laboratorio di Bioinformatica

Esercizi su probabilità e statistica relativi al test d'esame

♦ **Esercizio 8.12** *Dato $P(E_1) = 0.5$ e $P(E_1 \cup E_2) = 0.6$, trovare $P(E_2)$ quando*

a) *E_1 e E_2 sono incompatibili;*

b) *E_1 e E_2 sono indipendenti;*

c) *$P(E_1 \mid E_2) = 0.4$.*

♦ **Esercizio 8.13** *In un'urna vi sono quattro foglietti di carta del medesimo formato; ciascuno di essi è segnato con uno dei numeri 110, 101, 011, 000 e non vi sono due foglietti con lo stesso numero. Sia A_1 l'evento che sul foglietto estratto a caso la cifra 1 appaia al primo posto, A_2 che 1 appaia al secondo posto, A_3 che 1 appaia al terzo posto. Esaminare se tali eventi sono a coppie indipendenti.*

♦ **Esercizio 8.14** *Supposto che nel lancio di tre dadi simmetrici non risultino due dadi con la stessa faccia, calcolare*

a) *la probabilità che la somma dei punti sia 7;*

b) *la probabilità che si ottenga un 1.*

► **Esempio 5.4** Supponiamo che uno studente affronti due esami e che la probabilità di passare il primo esame sia 0.6, mentre sia 0.8 quella di passare il secondo esame; inoltre, sia 0.5 la probabilità che egli passi ambedue gli esami. Si cerca la probabilità che egli passi almeno uno degli esami e la probabilità che sia bocciato in ambedue. Calcolare, inoltre, la probabilità che lo studente passi il secondo esame, supposto che abbia passato il primo esame, e analogamente la probabilità che passi il primo esame, supposto che abbia passato il secondo.

Indichiamo con E_1, rispettivamente E_2, l'evento corrispondente alla promozione al primo esame, rispettivamente al secondo esame. Allora $E_1 \cap E_2$ è l'evento che lo studente passi ambedue gli esami, e $E_1 \cup E_2$ è l'evento che egli passi almeno un esame. Si ha quindi

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$$

L'evento $\overline{(E_1 \cup E_2)}$ è l'evento che lo studenti fallisca in ambedue gli esami. Si ha

$$P(\overline{(E_1 \cup E_2)}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - 0.9 = 0.1$$

La probabilità che lo studente passi il secondo esame, supposto che abbia passato il primo, è data da $P(E_2 \mid E_1)$, e quindi

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{5}{6}$$

Analogamente, la probabilità che lo studente passi il primo esame, supposto che abbia passato il secondo, è data da $P(E_1 \mid E_2)$, ossia

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{5}{8}$$

Come si vede, in generale $P(E_1 \mid E_2) \neq P(E_2 \mid E_1)$.

▼ **Osservazione 8.1** *Osserviamo che eventi disgiunti non sono indipendenti. Infatti, in caso contrario per ogni coppia di eventi disgiunti E_1 e E_2 almeno uno di essi dovrebbe essere di probabilità zero, in quanto $0 = P(\emptyset) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\,P(E_2)$. In realtà, due eventi disgiunti sono fortemente dipendenti, in quanto "disgiunti" significa "incompatibili": se uno di essi è realizzato, allora si sa che l'altro non lo è.* ■

► **Esempio 8.9** Data la seguente tabella

	$P(E_1)$	$P(E_2)$	$P(E_1 \cup E_2)$
caso 1	0.1	0.9	0.91
caso 2	0.4	0.6	0.76
caso 3	0.5	0.3	0.73

esaminare per quali casi gli eventi E_1 e E_2 sono stocasticamente indipendenti. Tenendo conto che $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$, dal risultato (8.14), si ottiene

	$P(E_1 \cap E_2)$	$P(E_1)\,P(E_2)$	indipendenza
caso 1	0.09	0.09	si
caso 2	0.24	0.24	si
caso 3	0.07	0.15	no

► **Esempio 8.10** Consideriamo l'esperimento: un dado simmetrico è lanciato due volte, oppure, equivalentemente, due dadi simmetrici sono lanciati simultaneamente. Lo spazio S è costituito dalle coppie {(1,1), (1,2), ...,(1,6), (2,1), ..., (5,6), (6,6)}. Gli eventi E_1, E_2 sono definiti nel modo seguente

- E_1 = primo lancio pari $= \{2, 4, 6\}$
- E_2 = secondo lancio minore o uguale a 2 $= \{1, 2\}$

Essendo i lanci indipendenti, si ha $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{3}{6}\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Osserviamo che i casi favorevoli all'evento $E_1 \cap E_2$ corrispondono alle sei coppie {(2,1), (2,2), (4,1), (4,2), (6,1), (6,2)}, mentre i casi possibili sono 36.

► **Esempio 8.11** Si cerca la probabilità P di ottenere tre sei in tre lanci successivi di un dado simmetrico. Trattandosi di eventi indipendenti, si ha $P = \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

► **Esempio 8.12** Un dado simmetrico è lanciato quattro volte. Si cerca la probabilità di ottenere un sei almeno una volta. Sostituendo l'evento "un sei almeno una volta" con l'evento complementare "nessun sei", si ha che la probabilità di non ottenere un sei in un singolo lancio è $\frac{5}{6}$, e quindi la probabilità di non ottenere un sei in quattro lanci è uguale a $(\frac{5}{6})^4$. Pertanto, la probabilità di ottenere almeno un sei con quattro lanci è $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.518$.

► **Esempio 5.5** Supponiamo di conoscere che approssimativamente il 50% degli individui con età superiore ai 40 anni sia in sovrappeso, e che la percentuale di quelli che sono in sovrappeso e che hanno una malattia all'apparato circolatorio sia del 25%. La probabilità che un individuo scelto a caso con più di 40 anni e in sovrappeso (evento E_1) abbia una malattia all'apparato circolatorio (evento E_2), ossia la probabilità $P(E_2 \mid E_1)$, è data da $P(E_1 \cap E_2)/P(E_1) = (\frac{1}{4})/(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

► **Esempio 5.6** Nell'ipotesi che una famiglia abbia due figli, si cerca la probabilità condizionata che ambedue i figli siano maschi, sapendo che almeno uno di essi è maschio.

Assumiamo che lo spazio campionario S sia dato da $S = \{(m,m),(m,f),(f,m),(f,f)\}$, ove, ad esempio, (m,f) indica che il figlio più vecchio sia una femmina e il più giovane maschio, e che tutti gli elementi dello spazio siano ugualmente possibili.

Indichiamo con E_1 l'evento che ambedue i figli siano maschi, e con E_2 l'evento che almeno uno di essi sia maschio. Si ha allora

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(\{(m,m)\})}{P(\{(m,m),(m,f),(f,m)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

► **Esempio 5.8** Supponiamo che da un'urna contenente sette palline nere e cinque bianche si estraggano due palline, senza sostituzione delle palline estratte (ossia, senza reinbussolamento). Calcolare la probabilità che ambedue le palline estratte siano nere, nell'ipotesi che ogni pallina nell'urna abbia la stessa possibilità di essere estratta.

Indichiamo con E_1 e E_2 rispettivamente gli eventi che la prima e la seconda pallina estratta sia nera. Ora, nell'ipotesi che la prima pallina estratta sia nera, rimangono sei palline nere e cinque bianche, e quindi $P(E_1 \mid E_2) = 6/11$. Dal momento che $P(E_2) = 7/12$, si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\,P(E_1 \mid E_2) = \frac{7}{12}\,\frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

pag 1.

► **Esempio 5.9** Con riferimento all'Esempio 5.4, dal momento che $P(E_1 \cap E_2) = 0.5$ e $P(E_1)\,P(E_2) = 0.48$, i risultati per i due esami non sono indipendenti. In effetti, dal momento che $P(E_1 \cap E_2) > P(E_1)P(E_2)$, la promozione in uno degli esami può aiutare la prestazione dello studente nell'altro aumentando la sua fiducia.

► **Esempio 5.10** Consideriamo il lancio di due dadi simmetrici. Sia E_1 l'evento che la somma dei due numeri ottenuti sia sei e C l'evento che il primo dado dia quattro. Allora

$$P(E_1 \cap C) = P(\{4,2\}) = \frac{1}{36}, \qquad P(E_1)\,P(C) = \frac{5}{36}\,\frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

Esercizio: Il 50% dei fiori venduti da un vivaio sono rose e di queste il 40% è giallo. Inoltre, il 30% dei fiori venduti dal vivaio è giallo. Determinare la probabilità p_1 che un fiore venduto dal vivaio sia una rosa gialla. Determinare la probabilità p_2 che un fiore venduto dal vivaio sia o giallo o una rosa.

Risposta: $p_1 = 0.20$ $\quad p_2 = 0.60$

Esercizio: Una coppia decide di avere due figli e un'altra coppia di averne tre. La probabilità che nasca un maschio o una femmina è sempre del 50%. Determinare la probabilità p che ci siano meno di 2 figli maschi tra le due famiglie.

Risposta: $p = 3/16$

Esercizio: Si vuole determinare quale percentuale della popolazione abbia assunto droga. Per mantenere l'anonimato si chiede all'intervistato di rispondere (in privato) SI o NO a una domanda così congegnata. Egli lancia una moneta: se esce testa risponde alla domanda "Hai assunto droga?"; se esce croce, rilancia la moneta e risponde alla domanda "E' uscita croce al secondo lancio?".

Se il risultato del questionario è di 87 SI e di 94 NO, a quanto si può stimare la percentuale di intervistati che ha assunto droga?

Risposta: 46%

▼ **Problema 5.3** *Un paragrafo di un libro contiene 8 parole di una lettera, 12 di due lettere, 20 di tre lettere, 25 di quattro lettere, 60 di cinque o più lettere. Nell'ipotesi di scegliere a caso una parola, determinare la probabilità che la parola abbia*

a) *più di tre lettere;*

b) *almeno tre lettere;*

c) *esattamente tre lettere;*

SOLUZIONE. Lo spazio campionario è dato da

$$S = \{x \mid x \text{ è una parola del paragrafo}\}$$

ed è costituito da 125 eventi elementari. La probabilità di considerare una parola qualsiasi è allora 1/125. Gli eventi da esaminare sono i seguenti

$$E_1 = \{x \mid x \text{ è una parola con più di tre lettere}\}$$
$$E_2 = \{x \mid x \text{ è una parola con almeno tre lettere}\}$$
$$E_3 = \{x \mid x \text{ è una parola con esattamente tre lettere}\}$$

Dalla definizione di probabilità si ha

$$P(E_1) = \frac{85}{125} = 0.68; \quad P(E_2) = \frac{105}{125} = 0.84; \quad P(E_3) = \frac{20}{125} = 0.16$$

▼ **Problema 5.4** *Un ascensore parte con $k = 5$ passeggeri e si ferma a $n = 6$ piani. Calcolare la probabilità che nessuna coppia di passeggeri scenda allo stesso piano.*

SOLUZIONE. In condizioni di probabilità uniforme, la probabilità richiesta è data dal rapporto

$$\frac{P(6,5)}{6^5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{54} \approx 0.0926$$

tra il numero delle disposizioni (permutazioni) di 6 oggetti a gruppi di 5 e il numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a gruppi di 5.

Analogamente, la probabilità che k passeggeri che scelgono a caso n scompartimenti di un treno (con $k \leq n$) siano in differenti scompartimenti è data da $P(n,k)/n^k$. Ad esempio, se $k = n = 5$ si ha $5!/5^5 = 0.0384$.

▼ **Problema 5.5** *Calcolare la probabilità nel gioco del lotto di*

a) *di vincere un ambo, un terno, una quaterna, una cinquina in una estrazione;*

b) *che i cinque numeri di una estrazione appartengano ad una stessa decina;*

c) *che i cinque numeri di una estrazione appartengano a cinque decine diverse.*

SOLUZIONE.

a) Il numero delle estrazioni possibili è uguale al numero delle combinazioni di 90 oggetti a gruppi di 5, ossia $\binom{90}{5}$. Nel caso dell'ambo si vince quando due dei cinque numeri estratti coincidono con quelli giocati; il numero dei casi in cui si può vincere è quindi

dato dal numero delle combinazioni di 88 numeri a gruppi di 3, ossia $\binom{88}{3}$. In modo analogo si procede negli altri casi, e si ottengono i seguenti risultati

$$P(\text{ambo}) = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801} \approx 2.5 \cdot 10^{-3}; \quad P(\text{terno}) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11\,748} \approx 8.5 \cdot 10^{-5}$$

$$P(\text{quaterna}) = \frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511\,038} \approx 1.95 \cdot 10^{-6}$$

$$P(\text{cinquina}) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 2.27 \cdot 10^{-8}$$

b) Se la decina è fissata, si hanno $\binom{10}{5}$ casi favorevoli; d'altra parte la decina può essere prefissata in 9 modi diversi, per cui la probabilità richiesta è data da

$$\frac{9\binom{10}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{63}{1220813} \approx 5.16 \cdot 10^{-5}$$

c) Il numero dei casi favorevoli affinché i cinque numeri estratti appartengano a cinque decine diverse prefissate è 10^5; d'altra parte le cinque decine si possono prefissare in $\binom{9}{5}$ modi diversi. La probabilità richiesta è quindi data da

$$\frac{10^5\binom{9}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{350\,000}{1\,220\,813} \approx 0.287$$

▼ **Problema 5.6** *Un'urna contiene 5 palline, due bianche e tre rosse. Calcolare la probabilità che estraendo due palline contemporaneamente queste siano dello stesso colore.*

SOLUZIONE. Indicando con E_2 l'evento corrispondente all'estrazione di 2 palline bianche e con G_2 l'evento corrispondente all'estrazione di due palline rosse, si ha

$$P(E_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}; \qquad P(G_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

Essendo i due eventi E_2 e G_2 disgiunti, si ha

$$P(E_2 \cup G_2) = P(E_2) + P(G_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

▼ **Problema 5.7** *Supponiamo che un determinato libro venga cercato in tre differenti biblioteche e che ogni biblioteca abbia probabilità 0.60 di avere tale libro; inoltre, sia 0.25 la probabilità che il libro sia stato dato in prestito. Calcolare la probabilità di ottenere il libro.*

SOLUZIONE. La probabilità che il libro non venga trovato in nessuna delle tre biblioteche è data da $(0.60 \times 0.25 + 0.40)^3$, nell'ipotesi che le scelte delle tre diverse biblioteche siano eventi indipendenti, come pure l'evento che la biblioteca abbia il libro sia indipendente dall'evento che il libro sia stato dato in prestito. Passando al complementare, la probabilità cercata è data da $1 - (0.60 \times 0.25 + 0.40)^3 \approx 0.8336$.

▼ **Problema 5.8** *Un cacciatore colpisce un bersaglio in media una volta su tre. Si cerca la probabilità che colpisca il bersaglio in tre colpi.*

SOLUZIONE. Assumendo $\frac{1}{3}$ come probabilità di colpire il bersaglio con un tiro, la probabilità dell'evento E ={il bersaglio è colpito almeno una volta in tre colpi} è data da $P(E) = 1 - P(\overline{E})$, ove $\overline{E}$ è l'evento che il bersaglio non venga colpito nessuna volta. Ritenendo i successivi colpi indipendenti, si ha per la regola del prodotto $P(\overline{E}) = (\frac{2}{3})^3$. In conclusione

$$P(E) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} \approx 0.7037$$

In maniera analoga, si trova che la probabilità di colpire il bersaglio con due colpi è data da ≈ 0.5556 e con quattro colpi da ≈ 0.8025.

▼ **Problema 5.14** *Trentadue squadre partecipano ad un torneo di calcio ad eliminazione. Supponendo che gli accoppiamenti iniziali e che il risultato di ogni partita siano casuali, calcolare la probabilità che due squadre prefissate si trovino a giocare tra loro nel corso del torneo.*

SOLUZIONE. Trattandosi di un torneo ad eliminazione, il numero totale di partite disputate è $16+8+4+2+1 = 31$. Il numero delle coppie non ordinate che possono essere formate con le squadre date è $\binom{32}{2} = \frac{32\times 31}{2} = 496$. La probabilità richiesta può allora essere ottenuta riportando il problema allo schema dell'estrazione di 31 oggetti da un'urna contenente 496 oggetti diversi (ogni oggetto corrisponde ad una coppia di squadre), ed è quindi data dal rapporto $\frac{31}{496} = \frac{1}{16}$.

▼ **Problema 5.22** *La Tabella 5.2 riporta l'incidenza del daltonismo per il rosso-verde in una popolazione umana. Nell'ipotesi che le frequenze riportate possano essere assunte come probabilità, calcolare la percentuale dei daltonici nei maschi e rispettivamente nelle femmine. Indicare se i risultati della tabella mostrano una dipendenza del daltonismo dal sesso.*

	maschio (M)	femmina (F)	totale
daltonico (D)	4.23%	0.65%	4.88%
normale (N)	48.48%	46.64%	95.12%
totale	52.71%	47.29%	100.00%

Tabella 5.2. Incidenza del daltonismo per il rosso-verde in una popolazione umana.

SOLUZIONE. Possiamo considerare come spazio campionario l'insieme

$$S = \{DM, DF, NM, NF\}$$

Le corrispondenti probabilità verificano gli assiomi richiesti; in particolare sono numeri compresi tra lo 0% e il 100% e hanno per somma 100%. Si possono considerare differenti eventi composti. In particolare l'evento composto {daltonico}$\equiv \{DM, DF\}$ ha probabilità 4.88%; Analogamente, l'evento composto {maschio}$\equiv \{DM, NM\}$ ha probabilità 52.71%.

Per calcolare l'incidenza del daltonismo nei maschi, si può utilizzare la formula della probabilità condizionata

$$P(D \mid M) = \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{4.23\%}{52.71\%} \approx 0.0803 = 8.03\%$$

Analogamente si trova che l'incidenza nelle femmine $P(D \mid F) = 0.0137 = 1.37\%$.

Dal momento che $P(D \mid M) = 8.03\% \neq P(D) = 4.88\%$, si ricava che il daltonismo non è stocasticamente indipendente dal sesso.

▼ **Problema 5.23** *Ad una votazione per l'elezione a un singolo posto vi sono 4 candidati, indicati rispettivamente con A, B, C, D. Gli esperti forniscono le seguenti probabilità di vittoria $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$ e $P(D) = 0.1$. Calcolare la probabilità di vincere di A, nell'ipotesi che C si ritiri dalla competizione.*

SOLUZIONE. La probabilità cercata è data da $P(A \mid \overline{C})$, ossia dalla probabilità condizionata che A vinca quando è noto che C perde. Si ha quindi

$$P(A \mid \overline{C}) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

Ora, $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.2 = 0.8$. D'altra parte si ha

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \overline{C}) = 0 + P(A \cap \overline{C})$$

dal momento che l'evento che A e C vincano contemporaneamente è impossibile, dato che vi può essere un unico vincitore. In definitiva,

$$P(A \mid \overline{C}) = \frac{P(A)}{P(\overline{C})} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

In maniera analoga si possono correggere le probabilità di vittoria dei candidati B e D.

▼ **Problema 5.24** *Nella duplicazione del* DNA, *possono verificarsi degli errori che portano a mutazioni osservabili nell'organismo. Spesso tali errori sono indotti da elementi chimici. Supponiamo che una colonia di batteri in riproduzione sia esposta a una sostanza chimica che ha una probabilità 0.4 di indurre un errore nella replicazione. Si suppone, comunque, che il 65% degli errori siano "silenti" nel senso che non portano a una mutazione osservabile. Calcolare la probabilità di osservare una colonia con mutazioni.*

SOLUZIONE. Indichiamo con E_1 l'evento corrispondente al verificarsi di un errore e con E_2 l'evento che la mutazione sia osservabile. Il problema richiede il calcolo della probabilità $P(E_1 \cap E_2)$. Si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \mid E_1)\, P(E_1) = 0.35 \times 0.4 = 0.14$$

▼ **Problema 5.16** *Calcolare la probabilità che il 3 si presenti almeno una volta in due lanci di un dado statisticamente simmetrico.*

SOLUZIONE. Il fatto che il dado sia statisticamente simmetrico (ossia non truccato) permette di assegnare una distribuzione di probabilità uniforme $\frac{1}{6}$ a ciascuna faccia del dado. Indichiamo con E_1 l'evento { 3 al primo lancio } e con E_2 l'evento { 3 al secondo lancio }. Allora, il problema chiede la probabilità $P(E_1 \cup E_2)$. Per il suo calcolo segnaliamo tre differenti metodi.

Metodo 1 Gli eventi E_1 e E_2 non sono mutuamente esclusivi, ma indipendenti, per cui

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Metodo 2 Tenendo conto che $P(E_1 \cup E_2) + P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1$, si ha

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(\overline{E_1})P(\overline{E_2}) \\ &= 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Metodo 3 Il numero dei modi in cui può verificarsi E_1, ma non E_2, è 5; analogamente, è 5 il numero dei modi in cui può verificarsi E_2, ma non E_1, mentre è 1 il numero dei modi in cui E_1 e E_2 possono verificarsi contemporaneamente. Pertanto, il numero dei modi in cui può verificarsi almeno uno dei due eventi E_1 e E_2 è dato da $5+5+1 = 11$ e $P(E_1 \cup E_2) = 11/36$.

▼ **Problema 5.17** *Una banca del sangue ha disponibili* 10 *unità di sangue* A^+ *e di queste quattro sono contaminate dal siero dell'epatite. Se tre unità sono scelte a caso per l'utilizzo su tre pazienti, trovare la probabilità che tutti e tre i pazienti siano esposti all'epatite.*

SOLUZIONE. Poiché l'ordine non è di interesse, si ha

$$P(\text{tutti e tre esposti al rischio}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{4}{120} \approx 0.0333$$

▼ **Problema 5.19** *Si hanno tre monete, di cui la* M_1 *non truccata (quindi con due facce distinte, testa* T *e croce* C*), la* M_2 *con due teste e la* M_3 *con due croci. Si estrae a caso una moneta e al lancio casuale di tale moneta si osserva una testa. Si cerca la probabilità che l'altro lato della moneta sia ancora testa.*

SOLUZIONE. In pratica si cerca la probabilità condizionata $P(M_2 \mid T)$ data da

$$P(M_2 \mid T) = \frac{P(M_2 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M_2)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

▼ **Problema 5.27** *Supponiamo che di tutti i pazienti di cancro, 52% siano maschi e che per i maschi la sopravvivenza di almeno 5 anni sia del 35%. Calcolare la probabilità che un malato di cancro scelto a caso sia un maschio e soppravviva per almeno 5 anni.*

SOLUZIONE. Indichiamo con E_1 l'evento che il paziente scelto a caso sia un maschio e con E_2 l'evento che il paziente scelto a caso soppravviva almeno 5 anni. Dalla formula di moltiplicazione si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \mid E_1)\, P(E_1) = \frac{35}{100}\,\frac{52}{100} = 0.182$$

▼ **Problema 5.28** *A partire da dati statistici, si conosce che la percentuale dei fumatori abituali in una determinata popolazione è il 30%. Inoltre, è noto che il 6% dei decessi avviene a causa di tumore ai polmoni, e che tra quanti sono deceduti a causa di un tumore ai polmoni, il 70% erano fumatori abituali.*

Calcolare la probabilità che un fumatore abituale deceda per tumore al polmone.

SOLUZIONE. Indicato con T l'evento "affetto da tumore al polmone", e con F l'evento "fumatore abituale", il problema chiede il calcolo della probabilità condizionata $P(T \mid F)$. Dai dati del problema si ha $P(T) = 0.06$, $P(F) = 0.3$, ed inoltre $P(F \mid T) = 0.7$, da cui

$$P(T \cap F) = P(F \mid T)\, P(T) = 0.7 \times 0.06$$

Si ha pertanto

$$P(T \mid F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0.7 \times 0.06}{0.3} = 0.14 = 14\%$$

▼ **Problema 5.31** *Si supponga di sapere che il 15% della popolazione adulta sia affetta da ipertensione, ma che il 75% di tutti gli adulti sia personalmente convinto di non avere tale problema. Si supponga anche che il 6% della popolazione abbia l'ipertensione ma non pensi che la malattia sia presente. Calcolare la probabilità che la malattia sia effettivamente presente in un paziente adulto che afferma di non avere l'ipertensione e la probabilità che un paziente sospetti la presenza della malattia, quando la malattia è effettivamente presente.*

SOLUZIONE. Indichiamo con E_1 l'evento che il paziente non creda che la malattia sia presente e con E_2 l'evento corrispondente alla presenza della malattia. Si ha $P(E_1) = 0.75$, $P(E_2) = 0.15$ e $P(E_1 \cap E_2) = 0.06$. La prima domanda chiede di calcolare la probabilità condizionata $P(E_2 \mid E_1)$. Dalla definizione si ha

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0.06}{0.75} = 0.08$$

Vi è quindi una probabilità dell'8% che un paziente che pensa di non avere problemi con l'ipertensione, abbia in effetti la malattia.

La seconda questione richiede di calcolare la probabilità condizionata $P(\overline{E}_1 \mid E_2)$. Osservando che $P(E_2) = P(\overline{E}_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2)$, si ha

$$P(\overline{E}_1 \mid E_2) = \frac{P(\overline{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{0.15 - 0.06}{0.15} = 0.60$$

ossia, se il paziente esprime l'opinione di avere l'ipertensione, vi è una probabilità del 60% che abbia ragione.

Domanda n.62) Siano A e B due eventi, e sia $P(B) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.7$. Quanto deve valere la probabilità $P(A)$ affinché A e B siano eventi statisticamente indipendenti?

Domanda n.63) Siano A e B due eventi, e sia $P(B) = 0.2$ e $P(A \cup B) = 0.4$. Quanto deve valere la probabilità $P(A)$ affinché A e B siano eventi statisticamente indipendenti?

Domanda n.64) Ogni inverno il 70% della popolazione prende un raffreddore, il 40% prende un mal di gola e il 80% prende uno dei due. Determinare la probabilità p_1 che una persona prenda tutti e due. Determinare la probabilità p_2 che una persona che prende un raffreddore prenda anche un mal di gola.

Domanda n.65) Ogni inverno il 60% della popolazione prende un raffreddore, il 50% prende un mal di gola e il 80% prende uno dei due. Determinare la probabilità p_1 che una persona prenda tutti e due. Determinare la probabilità p_2 che una persona che prende un raffreddore prenda anche un mal di gola.

Domanda n.25) In una città ci sono due supermercati A e B. Il 40% degli abitanti fa la spesa in A e il 30% fa la spesa in B. Inoltre, il 20% fa la spesa sia in A che in B. Determinare la probabilità che un abitante faccia la spesa in almeno uno dei due.

Domanda n.26) Tra gli iscritti al corso di laurea in biologia il 60% degli studenti sono donne, il 25% ha superato il primo corso di matematica e il 70% è donna o ha superato il primo corso di matematica. Determinare la probabilità che uno studente scelto a caso sia una donna che ha superato il primo corso di matematica.